TD3 : Stabilité des systèmes linéaires

On considère un système d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ régi par l'équation différentielle suivante :

$$\tau^2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \tau \frac{ds(t)}{dt} = -e(t), \text{ avec } \begin{cases} s(0^+) = & 0 \\ \frac{ds(t)}{dt}|_{0^+} = & 0 \\ \tau > & 0 \end{cases}$$

Généralités

— Tout système défini par une équation différentielle à coefficients constants est linéaire.

— La relation entrée sortie est définie par

$$s(t) = (h * e)(t)$$

où $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du système, obtenue pour une entrée impulsionnelle $\delta(t)$.

— Pour $e(t) = \delta(t)$, on a donc :

$$\tau^2 \frac{d^2 h}{dt^2} + \tau \frac{dh}{dt} = -\delta(t)$$

— *Déf :* Un système est stable s'il retourne spontanément vers son état d'équilibre s'il en est écarté. Autrement dit, un système est stable si :
  — $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt$ converge
  — $\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$

Le problème est qu'il n'est pas évident de savoir si le système est stable à partir de l'équation différentielle. C'est pour cela que l'on passe dans le domaine de Laplace, et non *Attention, humour !* parce qu'il y a la place d'y passer.

Stabilité

— Dans le cas de signaux causaux, la définition de la transformée de Laplace unilatérale $X(p)$ d'un signal $x(t)$ est :

$$X(p) = \int_0^\infty x(t) e^{-pt} dt$$

— On cherche à exprimer $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$. Pour cela, on passe l'équation différentielle définissant le système dans le domaine de Laplace.

$$\tau^2 \frac{d^2 h}{dt^2} + \tau \frac{dh}{dt} = -et)$$

$$\tau^2 (p^2 S(p) - \frac{ds(t)}{dt}|_{0^+}) + \tau (S(p) - s(0^+)) = -E(p)$$

$$\tau^2 p^2 S(p) + \tau S(p) = -E(p)$$

donc

$$H(p) = -\frac{1}{\tau p (\tau p + 1)}$$

— Décomposition en éléments simples de $H(p)$

$$H(p = -\frac{1}{\tau p (\tau p + 1)} = \frac{A}{\tau p} + \frac{B}{\tau p + 1}$$

En multipliant par τp et en évaluant en $p = 0$, on obtient $A = -1$. En multipliant pat $\tau p + 1$ et en évaluant en $p = -1\tau$, on obtient $B = 1$.
Ainsi,

$$H(p) = -\frac{1}{\tau p} + \frac{1}{\tau p + 1}$$

$$h(t) = (-\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}})u(t)$$

Le système n'est pas stable car $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt$ diverge. Après une excitation impulsionnelle, le système tend vers une position d'équilibre qui n'est pas la position de repos.
Généralisation : Le système est stable si tous les pôles de $H(p)$ sont à parties réelles strictement négatives. (Ici, les pôles sont $p_1 = 0$ et $p_2 = -\frac{1}{\tau}$. C'est p_1 qui est responsable de l'instabilité.)
Pour expliciter cette condition, prenons par exemple $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ avec $D(p)$ un polynôme de degré 2. On note Δ son discriminant. Si $\Delta < 0$, alors les racines de $D(p)$ sont complexes conjuguées et on peut écrire

$$\frac{1}{D(p)} = \frac{A_i}{p - (a \pm jb)}$$

Or, $\frac{A_i}{p-p_i} = TL[A_i e^{p_i t}]$ donc $TL^{-1}[\frac{1}{D(p)}] = A_i e^{at} e^{\pm jb}$.
Le système est stable si $e^{at} \rightarrow_{t\rightarrow\infty} 0$, c'est-à-dire si $a < 0$, soit $Re(p_i) < 0$.

Effet du bouclage sur la stabilité

On envisage le bouclage du système linéaire défini précédemment par un gain k réel.

— On a immédiatement la fonction de transfert en boucle fermée (formule de Black) :

$$G(p) = \frac{H(p)}{1 + kH(p)} \text{ avec } H(p) = -\frac{1}{\tau p(\tau p + 1)}$$
$$G(p) = \frac{-1}{\tau p(\tau p + 1) - k}$$
$$G(p) = \frac{-1/\tau^2}{p^2 + p/\tau - k/\tau^2}$$

— Détermination des pôles de $G(p)$.

$$D(p) = p^2 + p/\tau - k/\tau^2 \quad \text{donc} \quad \Delta = \frac{1 + 4k}{\tau^2}$$

- — Cas $\Delta > 0$ i.e. $k > -\frac{1}{4}$: les racines de $D(p)$ sont alors $p_{1,2} = \frac{-1/\tau \pm 1/\tau\sqrt{1+4k}}{2}$ Si $1 + 4k \geq 1$ i.e. $k \geq 0$, il existe une racine positive et une racine négative : le système est instable. Si $0 \leq 1 + 4k < 1$ i.e. $-\frac{1}{4} \leq k < 0$, alors les deux racines sont strictement négatives : le système est stable.
- — Cas $\Delta < 0$ i.e. $k < -\frac{1}{4}$: les racines de $D(p)$ sont $p_{1,2} = \frac{-1/\tau \pm 1/\tau j\sqrt{-(4k+1)}}{2}$. Les racines sont à partie réelle strictement négative donc le système est stable.

En conclusion,

$$k \geq 0 \rightarrow \text{ instable}$$
$$k < -\frac{1}{4} \rightarrow \text{ stable}$$

Dans cet exemple, on rend le système stable par bouclage avec un gain $k < 0$.

De manière générale, le bouclage peut avoir soit un effet stabilisant, soit un effet déstabilisant sur un système.

Étude de la stabilité à partir de la fonction de transfert en boucle ouverte

On considère toujours le même système bouclé. On étudie sa stabilité à partir du critère de Nyquist, lequel repose sur une étude géométrique de $T(p)$, fonction de transfert en boucle ouverte du système.

On ne considèrera ici que le cas $k > 0$.

$$T(p) = \frac{-k}{\tau p(1+\tau p)}$$

Rappel du critère de Nyquist

Il est basé sur la relation $\boxed{N = P - Z}$ où

— N : nombre de tours algébriques autour du point (-1,0) faits par le lieu de Nyquist de $T(p)$

— P : nombre de pôles à $Re > 0$ de $T(p)$

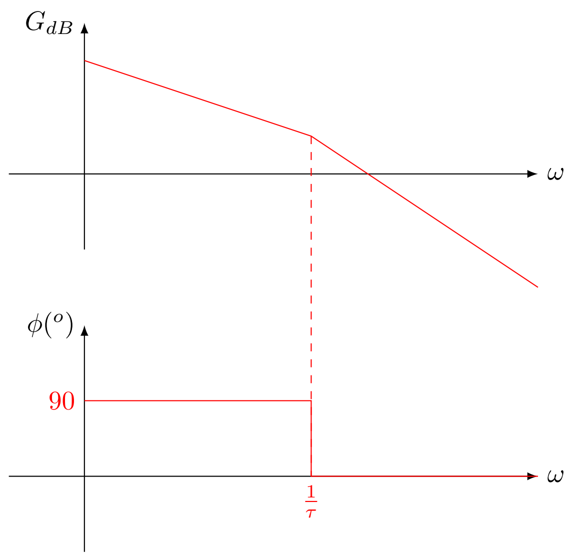
— Z : nombre de zéros à $Re > 0$ de $1 + T(p)$

Un système est stable en boucle fermée si $Z = 0$.

Étapes de la démonstration

1. On trace le Bode de $T(p)$: $|T(p)| et Arg(T(p))$
2. On trace le Nyquist (représentation de $T(p)$ dans le plan complexe)
3. On compte N
4. On détermine les pôles de $T(p)$ et on compte P le nombre de pôles à $Re > 0$ (compris dans le contour de Bromwich)
5. On en déduit $Z = P - N$ et on conclut sur la stabilité.

Diagramme de Bode



Lieu de Nyquist

D'après le diagramme de Bode :

— quand $\omega \to 0^+$, $|T(j\omega)| \to \infty$ et $\phi \to \pi/2$

— $0^+ < \omega < \infty$, $|T(j\omega)| \searrow$ et $\phi \searrow \pi/2$

— quand $\omega \to \infty$, $|T(j\omega)| \to 0$ et $\phi \to 0$

D'après le Nyquist

Si on parcourt le graphe de $\omega = -\infty$ à $\omega = +\infty$, on fait 1 tour dans le sens horaire de (-1,0) : $N = -1$

Calcul de P

Nombre de pôles de $T(p)$ à $Re < 0$

$$T(p) = \frac{-k}{\tau p(1+\tau p)} \quad p_1 = 0, \quad p_2 = -\frac{1}{\tau}$$

Avec un contour d'exclusion, on a $P = 0$

Calcul de N

On a $Z = P - N = 1$. Le système est instable.

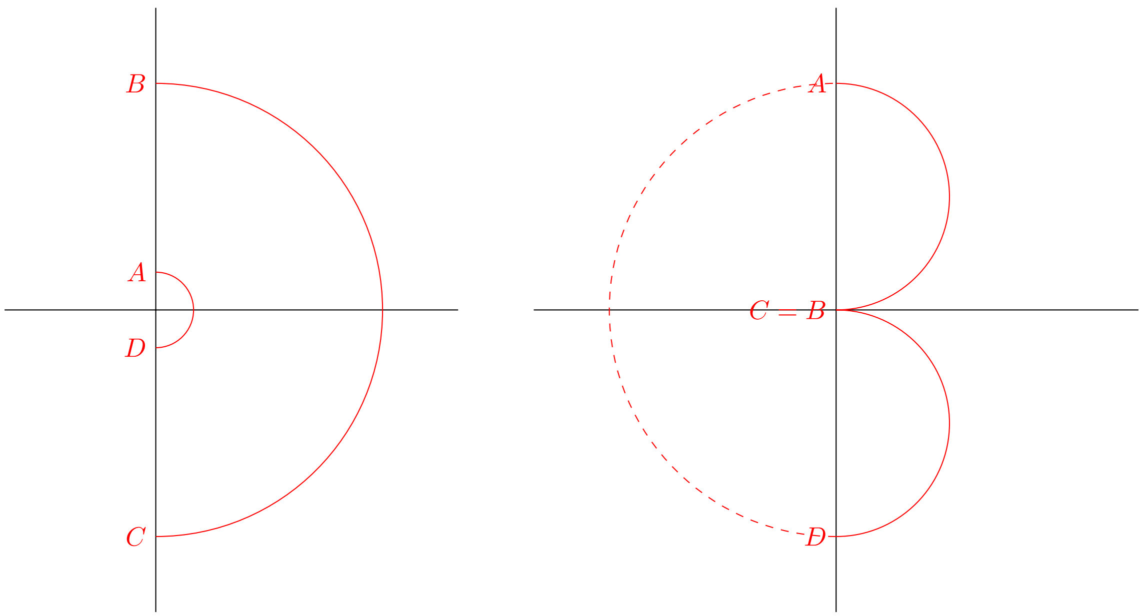


Figure 1 – Tracé du diagramme de Nyquist avec un contour de Bromwich d'exclusion