

TP1 : Introduction aux systèmes asservis échantillonnés : synthèse de correcteurs analogiques numérisés

Aymeric Arnould, Tom Colinot

2 décembre 2014

Effets de l'échantillonnage

Préparation 1

- Soit un signal sinusoïdal $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ échantillonné à la fréquence $F_e = 1/T_e$. Le spectre d'un signal purement sinusoïdal de fréquence f_0 est un Dirac de valeur 1 en f_0 et un Dirac de valeur -1 en $-f_0$. L'échantillonnage provoque une périodicité de ce spectre, de fréquence F_e .

En effet, l'échantillonnage du signal revient à le multiplier par un peigne de Dirac :

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_0(t - nT_e) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_e} e^{j\frac{2\pi kt}{T_e}}$$

On peut donc exprimer le signal échantillonné $x^*(t)$ puis sa transformée de Fourier :

$$x^*(t) = x(t).p(t) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\frac{2\pi kt}{T_e}}$$

$$X^*(\omega) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(2\pi f - j\frac{2\pi k}{T_e})$$

$$X^*(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta(f_0 - kF_e) - \delta(-f_0 - kF_e)) \text{ car } X(f) = \delta_{f_0}(f) - \delta_{-f_0}(f)$$

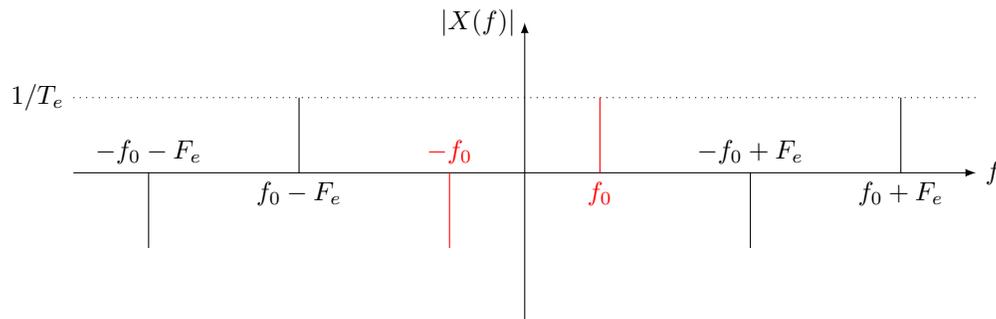


FIGURE 1 – Représentation du spectre $X^*(f)$ dans le cas où $F_e > 2f_0$

- Pour la reconstruction du signal, on utilise un filtre passe-bas idéal :

$$H(p = j2\pi f) = \begin{cases} 1 & \text{si } |f| \leq F_e/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Si $f_0 < F_e/2$, alors on va couper toutes les composantes sauf celles en f_0 et en $-f_0$. Le signal reconstitué sera donc le signal sinusoïdal initial.

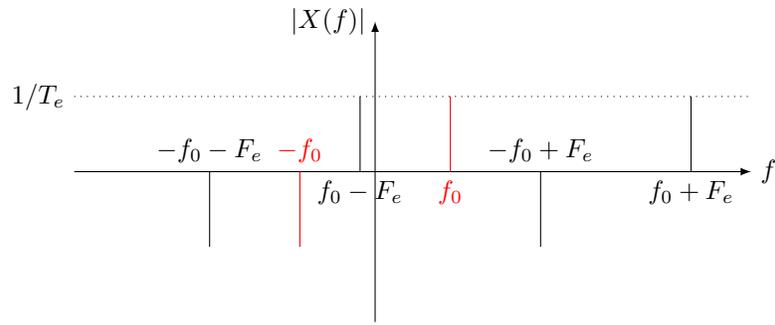


FIGURE 2 – Représentation du spectre $X^*(f)$ dans le cas où $F_e = 1.2f_0$

- Si $f_0 = 1,2F_e$, alors le spectre sera de la forme donnée en figure 2. Ainsi, en utilisant le filtre passe-bas, on ne récupérera que la composante correspondant à la fréquence $f_0 - F_e$, et la reconstitution sera donc incorrecte.

Manipulation 1

On réalise à l'aide de Simulink l'échantillonnage et la reconstitution d'un signal de fréquence f_0 avec une période d'échantillonnage $T_e = 1ms$ ($F_e = 1kHz$).

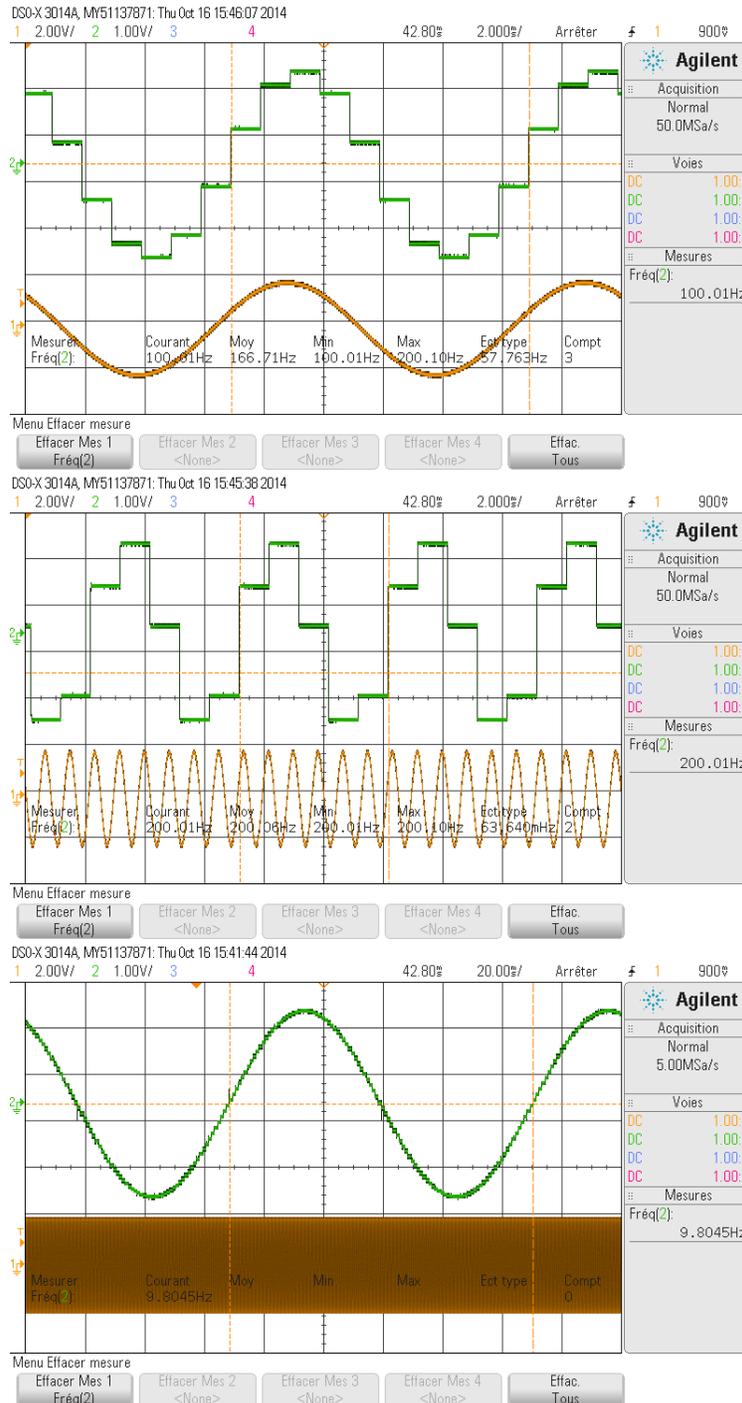


FIGURE 3 – $s(t)$ et $e(t)$ pour $f_0 = 100\text{Hz}$, $1,2\text{kHz}$ et $4,01\text{kHz}$

- Lorsque $f_0 < F_e/2$, le signal est correctement reconstitué.
- Lorsque $f_0 = 1,2F_e = 1,2\text{kHz}$, comme prévu dans la préparation, on ne récupère qu'un signal avec une fréquence $f_0 - F_e = 200\text{Hz}$.
- Lorsque $f_0 \approx kF_e$ (ici $k = 4$), alors on récupère de même un signal à la fréquence $f_0 - kF_e$ (ici $4010 - 4000 = 10\text{Hz}$) : c'est ce qu'on appelle un phénomène de battement.

Préparation 2

Le système comporte dans la chaîne directe le système analogique de fonction de transfert $H(p) = \frac{1}{1 + 2m_{BO} \frac{p}{\omega_{0BO}} + \frac{p^2}{\omega_{0BO}^2}}$ et un correcteur $C(p) = K_p$.

— L'expression de la fonction de transfert en boucle fermée s'écrit donc :

$$\begin{aligned} H_{BF}(p) &= \frac{H(p)C(p)}{1 + H(p)C(p)} \\ &= \frac{K_p}{(1 + 2m_{BO} \frac{p}{\omega_{0BO}} + \frac{p^2}{\omega_{0BO}^2}) + K_p} \\ H_{BF}(p) &= \frac{\frac{K_p}{K_p+1}}{1 + 2 \frac{m_{BO}}{K_p+1} \frac{p}{\omega_{0BO}} + \frac{p^2}{(K_p+1)\omega_{0BO}^2}} \end{aligned}$$

— Avec $K_p = 20$, on a alors

$$H_{BF}(p) = \frac{0.95}{1 + 3,81 \cdot 10^{-4} p + 3,04 \cdot 10^{-6} p^2}$$

On a donc :

$$\frac{1}{\omega_{0BF}^2} = 3,04 \cdot 10^{-6} \text{ et } \frac{2m_{BF}}{\omega_{0BF}} = 3,81 \cdot 10^{-4}$$

On en déduit les paramètres en boucle fermée :

$$\begin{aligned} \omega_{0BF} &= 574 \text{ rad.s}^{-1} \\ m_{BF} &= 0,11 \end{aligned}$$

À l'aide de l'abaque donnant le temps de réponse réduit $t_r \omega_0$ en fonction de l'amortissement m , on en déduit $t_r \omega_0 = 30$ rad donc

$$t_r = 52,3 \text{ ms}$$

L'abaque des dépassements indicels permet d'obtenir la valeur du premier dépassement

$$D_1 = 0.7$$

— Le diagramme de Bode est donné en annexe 1. On assure une marge de phase de 45° si on a pour une pulsation donnée une phase de -135° et un gain nul. Pour le système non corrigé, on a un gain de $-7,16 \text{ dB}$ pour une phase de -135° . Multiplier par un gain $K_{45} = 10^{7,16/20} = 2,28$ permet de translater la courbe de gain sans agir sur la phase, et on a alors bien la marge de phase voulue.

Manipulation 2

Simulation sur Simulink On réalise l'asservissement analogique et on prend la réponse indicielle.

Pour $K_p = 20$ on obtient la réponse indicielle donnée en annexe 5. La valeur finale est de 0.95, l'amplitude du premier dépassement est de 1.6. On a donc $D_1 = \frac{1.6-0.95}{0.95} = 0.68$. Le temps de réponse à 5% est d'environ 50ms.

Pour $K_p = K_{45} = 2,28$, on se propose de relever le gain et la phase à $\omega = 202\text{rad/s}$ (voir annexe 6). On a bien un gain unitaire et une phase de -135° donc le gain K_{45} assure bien une marge de phase de 45° .

Montage sur la maquette On réalise le montage sur la maquette.

Pour $K_p = 20 = R_1/R_2$, on utilise $R_1 = 12\text{K}\Omega$ et $R_2 = 600\Omega$ en mettant deux résistances de $1,2\text{k}\Omega$ en parallèle. On obtient la réponse indicielle suivante :

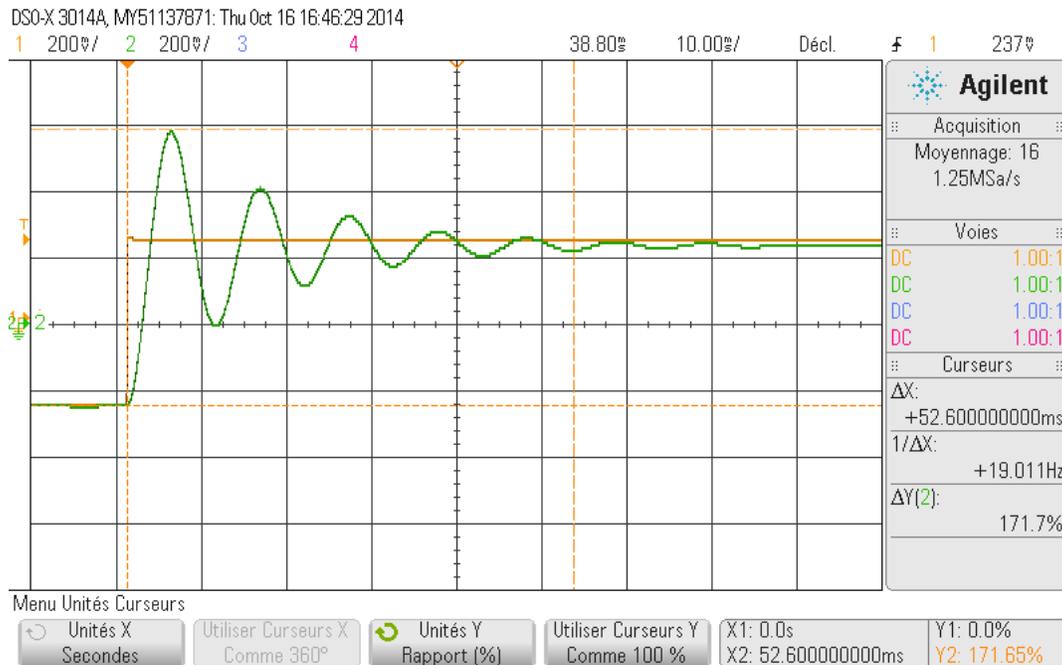


FIGURE 4 – Réponse indicielle, $K_p = 20$

Les curseurs nous permettent d'avoir un temps de réponse à 5% de 52ms et un premier dépassement de 70%.

Pour $K_p = K_{45}$, on obtient la réponse suivante à $\omega = 202\text{rad/s}$ ($f = 32.2\text{Hz}$) :

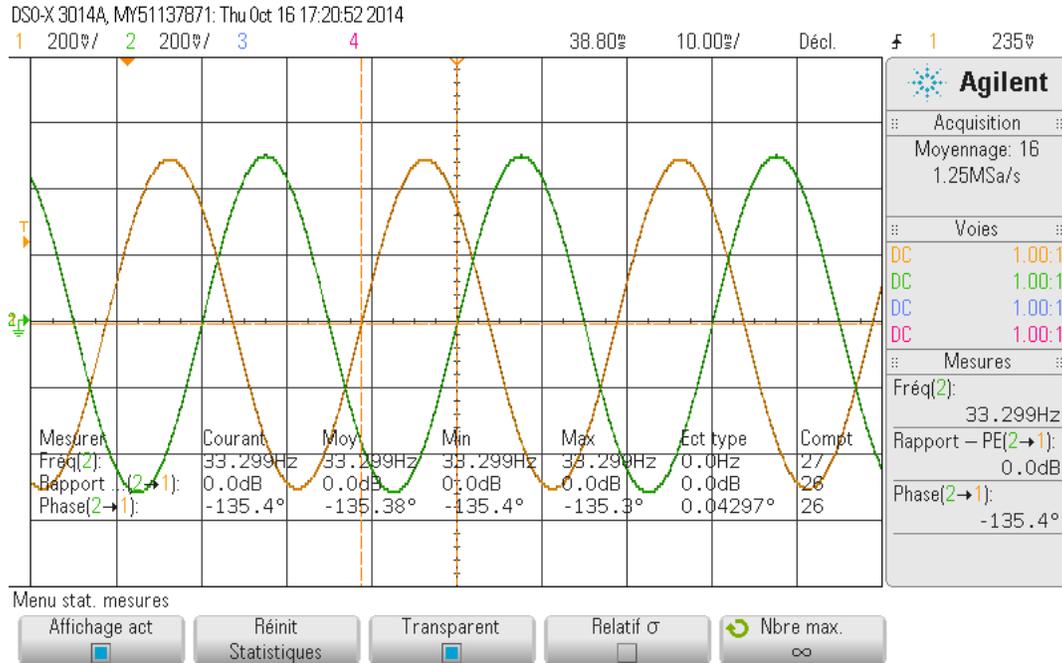


FIGURE 5 – $s(t)$ et $e(t)$ en boucle ouverte, $K = K_{45}$, $\omega = 202\text{rad/s}$

On a bien un gain unitaire et un déphasage de -135° , donc le gain K_{45} assure bien une marge de phase de 45° .

Conclusion partie 2 Les résultats donnés par la simulation sont conformes à ceux obtenus par expérimentation sur la plaquette. La simulation Simulink représente bien le système réel implanté sur la plaquette.

Correcteur analogique numérisé

Préparation 3

On modélise l'action de l'échantillonneur-bloqueur par un retard pur de fonction de transfert

$$B(p) = \exp(-T_e p/2)$$

Ainsi, le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte n'est pas affecté car $|\exp(-T_e p/2)| = 1$, et la phase est modifiée de $\arg(\exp(-T_e p/2)) = -T_e/2\omega$.

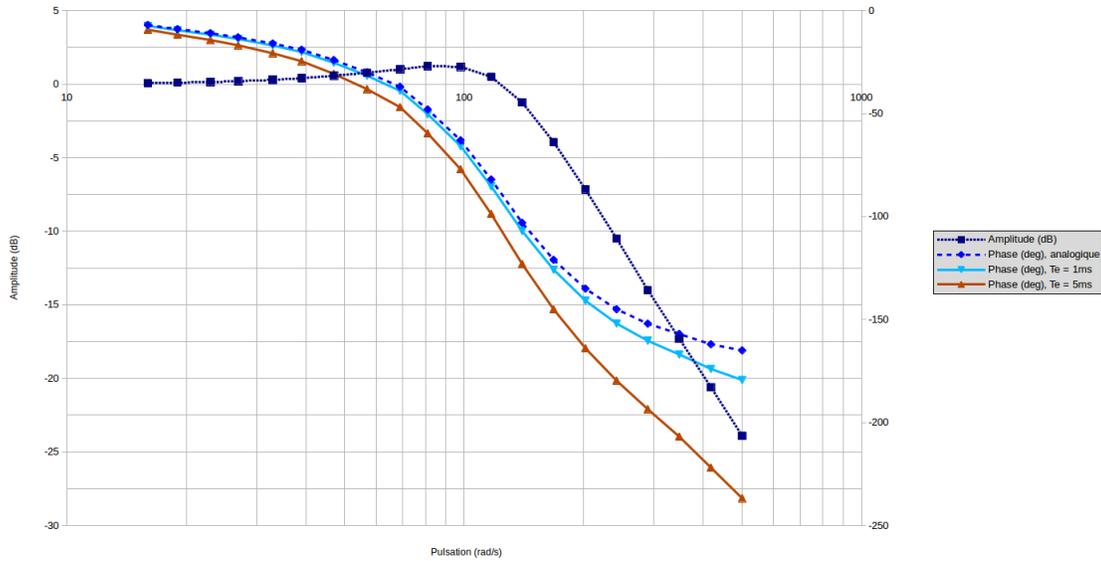


FIGURE 6 – Diagrammes de Bode du système analogique et échantillonné

— 1er cas : $T_e = 1ms$ (voir annexe 2)

Le gain correspondant à la phase -135° est de $-5.7dB$ pour $\omega = 190rad/s$, donc on a $K_{45} = 10^{5.7/20} = 1.93$.

La limite d'instabilité est atteinte lorsqu'on a simultanément une phase de -180° et un gain de $0dB$. On a ici un gain de $-23.9dB$ pour une phase de -180° , donc on a à la limite d'instabilité $K_{lim} = 10^{23.9/20} = 15.7$.

— 2ème cas : $T_e = 5ms$ (voir annexe 3)

Le gain correspondant à la phase -135° est de $-2.5dB$ pour $\omega = 150rad/s$, donc on a $K_{45} = 10^{2.5/20} = 1.33$.

La limite d'instabilité est atteinte lorsqu'on a simultanément une phase de -180° et un gain de $0dB$. On a ici un gain de $-10,5dB$ pour une phase de -180° , donc on a à la limite d'instabilité $K_{lim} = 3,35$.

Manipulation 3

On se propose dans les deux cas ($T_e = 1ms$, $T_e = 5ms$) de vérifier que le gain K_{45} assure la marge de phase à 45° et que le gain K_{lim} est bien la limite de stabilité.

1er cas : $T_e = 1ms$

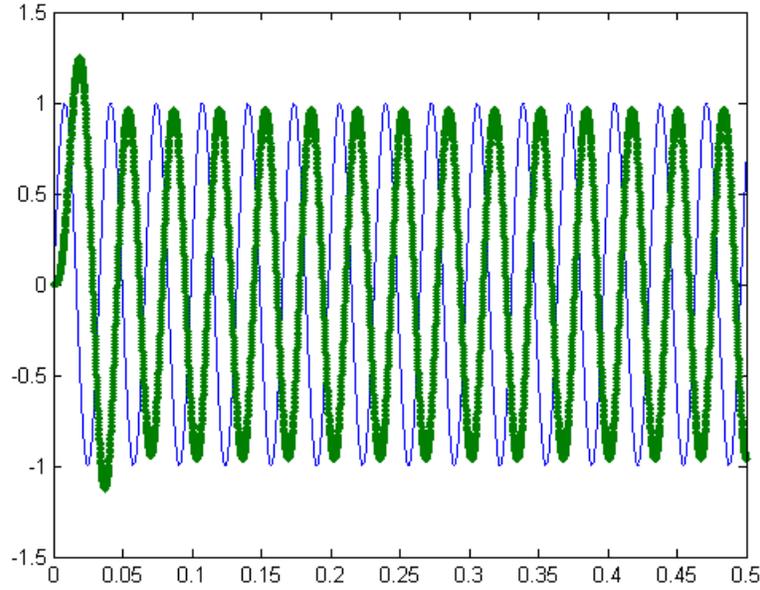


FIGURE 7 – $e(t)$ et $s(t)$ en boucle ouverte, $K_p = K_{45}$, $\omega = 190rad/s$

Le gain K_{45} assure bien une marge de phase de -135° .

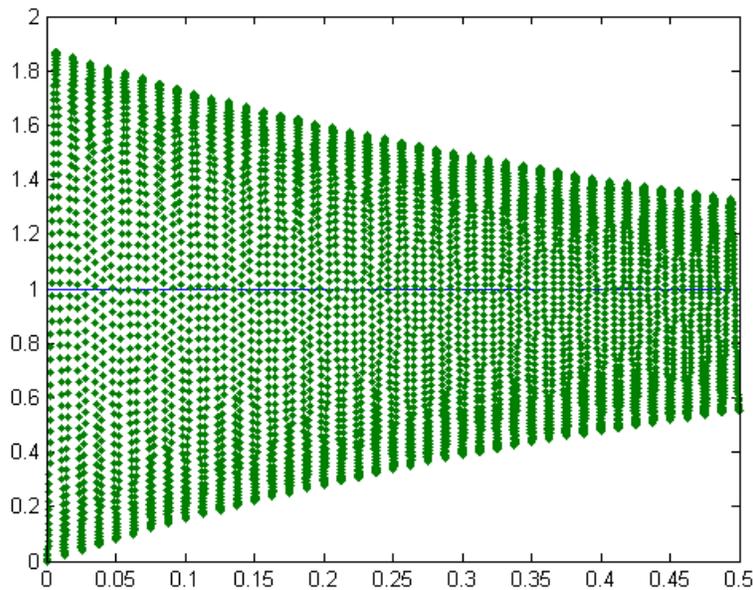


FIGURE 8 – Réponse indicielle, $K = K_{lim}$

Le gain K_{lim} assure bien la limite d'instabilité.

On se propose de comparer la simulation du système avec le correcteur numérique et avec sa modélisation par un retard pur.

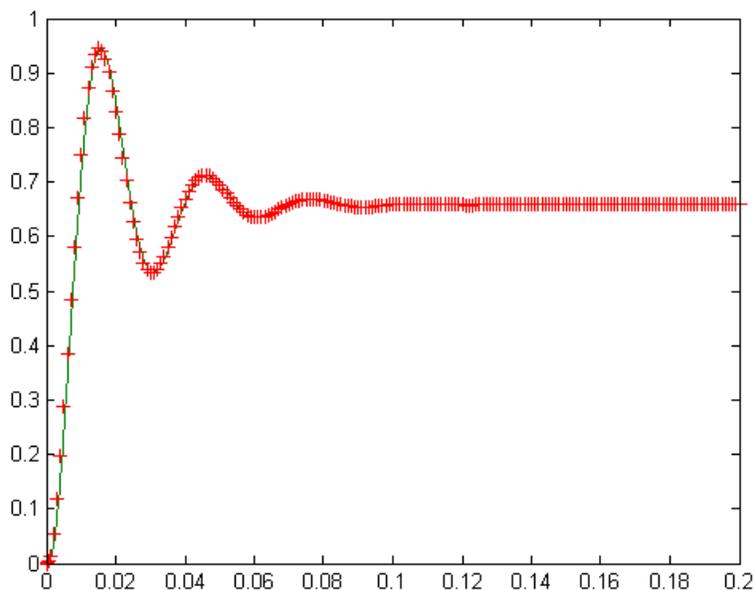


FIGURE 9 – Réponse indicielle simulée pour $K = K_{45}$, avec correcteur numérique (-) et modélisation par un retard pur (+)

La modélisation par un retard pur est très proche du comportement réel du correcteur.

En faisant le montage avec la plaquette analogique et le correcteur numérique, on retrouve une réponse semblable.

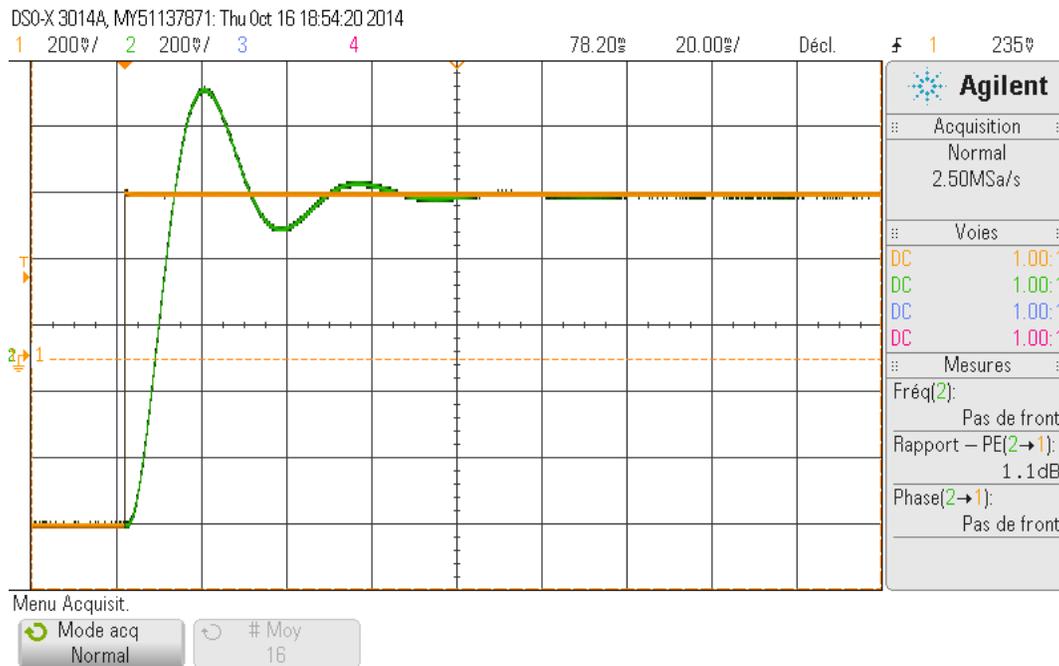


FIGURE 10 – Réponse indicielle avec la maquette et le correcteur numérique pour $K = K_{45}$

2ème cas : $T_e = 5ms$

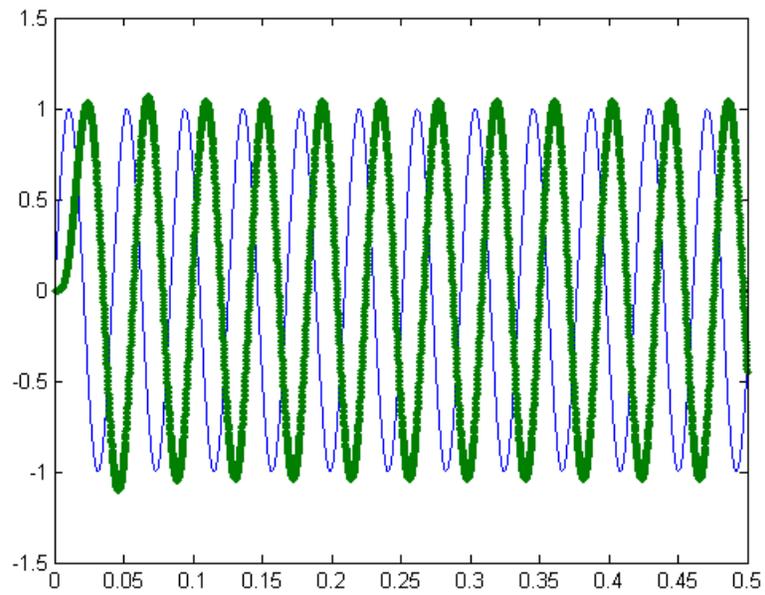


FIGURE 11 – $e(t)$ et $s(t)$ en boucle ouverte, $K_p = K_{45}$, $\omega = 150rad/s$

Le gain K_{45} assure bien une marge de phase de -135° .

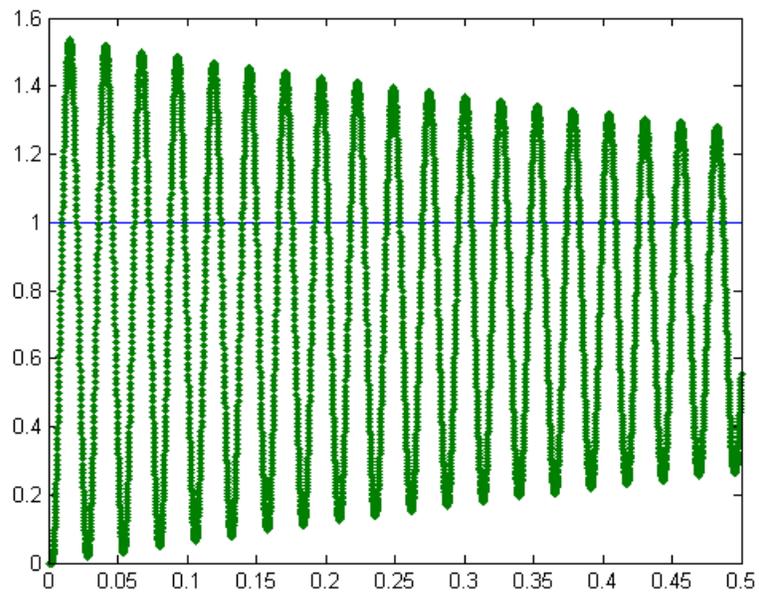


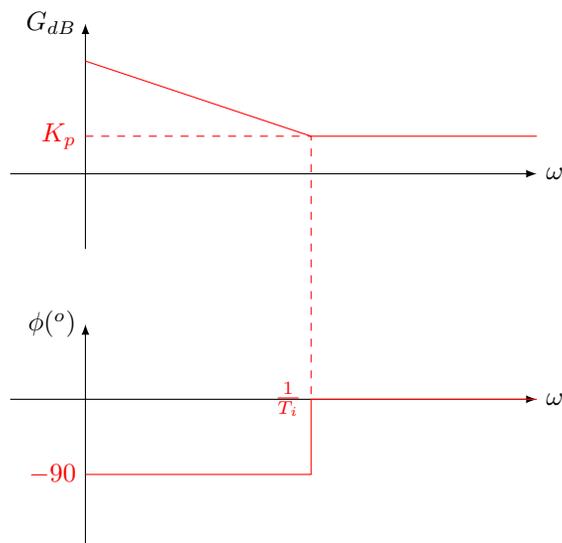
FIGURE 12 – Réponse indicielle, $K = K_{lim}$

Le gain K_{lim} assure bien la limite d'instabilité.

Synthèse d'un correcteur PI numérisé

Préparation 4

Le diagramme de Bode asymptotique du correcteur $C(p) = K_p(1 + \frac{1}{T_i p})$ est le suivant :



Pour obtenir une marge de phase de -45° , il faut utiliser K_p pour ajuster la courbe de gain. Pour cela, on se place dans le domaine où le gain du correcteur est égal à K_p et où la phase est nulle.

Le gain K_p utilisé sera celui calculé précédemment, $K_{45} = 2.28$. On avait pour le système non corrigé une phase de -135 dB pour une pulsation de 202 rad/s . On va donc placer $\frac{1}{T_i} = \frac{202}{10}$ donc $T_i = 49.5\text{ ms}$.