TD 3 et TD 4 : Propriétés de la stabilité. Application.

On se propose de traiter d'un certain nombre d'aspects relatifs à la stabilité des systèmes électroniques linéaires à temps continu au travers de deux exercices distincts que l'on traitera globalement en deux séances de TD. Certains aspects relatifs aux systèmes non-linéaires bouclés sont abordés dans le cas d'un oscillateur (problème 2).

PROBLEME 1
Quelques propriétés sur la stabilité des systèmes linéaires

On considère un système d'entrée e(t) et de sortie s(t) régi par l'équation différentielle suivante :

$$\tau^2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \tau \frac{ds(t)}{dt} = e(t) \text{, avec} \quad \begin{cases} s(0^+) = 0 \\ \left(\dfrac{ds(t)}{dt}\right)_{0^+} = 0 \\ \tau > 0 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

I. Généralités

Ce système est-il linéaire ? En rappeler la relation d'entrée-sortie où l'on notera h(t) sa réponse impulsionnelle. A quelle équation différentielle h(t) obéit-elle ? A quelle condition sur h(t) le système est-il stable ?

II. Stabilité

L'étude de la stabilité d'un système linéaire n'étant pas aisée dans le domaine temporel, on l'effectue préférentiellement dans le domaine de Laplace.

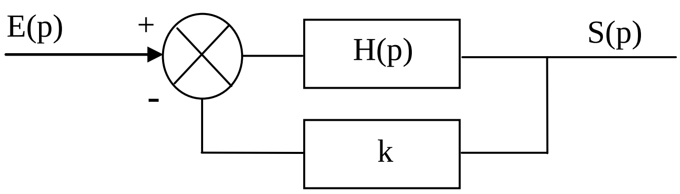
a / Rappeler la définition de la transformée de Laplace X(p) d'un signal x(t).

b / On cherche à déterminer H(p), la fonction de transfert du système défini par (I). Quel lien existe-t-il entre h(t) et H(p), entre S(p), transformée de Laplace de s(t), E(p), transformée de Laplace de e(t) et H(p) ? Exprimer alors H(p) en fonction de τ et de la variable de Laplace p.

c / Décomposer H(p) en éléments simples et en déduire h(t). Le système est-il stable ? Généraliser ce résultat : quelle est la condition sur les pôles de H(p) pour que le système soit stable ?

III. Effet du bouclage sur la stabilité

On envisage le bouclage du système linéaire défini par (I) par un gain k réel :



a / Calculer la fonction de transfert en boucle fermée G(p) du nouveau système.

b / Déterminer les pôles de G(p) et discuter de la stabilité de l'ensemble en fonction de k. Conclure quant à l'effet possible du bouclage d'un système linéaire.

Indications :

$$TL\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = p \times TL(f(t)) - f(0^+); \quad y(t) = (x_1 * x_2)(t) \Leftrightarrow Y(p) = X_1(p) \times X_2(p); \quad TL(e^{-\alpha t}) = \frac{1}{p+\alpha}$$

IV. Etude de la stabilité à partir de la fonction de transfert en boucle ouverte

Lorsqu'on ne connaît pas l'expression explicite du système mais qu'on a pu effectuer un relevé du diagramme de Bode en boucle ouverte, on étudie la stabilité du système linéaire bouclé à partir de ce relevé.

a / Rappeler la définition de la fonction de transfert en boucle ouverte, notée T(p), d'un système linéaire bouclé. Rappeler l'énoncé du critère de Nyquist.

b / On considère maintenant le système décrit au III/ dans le cas où k>0. Tracer le diagramme de Bode asymptotique de T(jω). Déduire de ce diagramme et du contour de Bromwich l'allure du lieu de Nyquist de T(p). Retrouver ainsi le résultat du 3 / b / quant à la stabilité du système pour k>0.

PROBLEME 2 :
Etude d'un système bouclé – Cas particulier de l'oscillateur

Cet exercice est consacré à l'étude pratique d'un système électronique bouclé. La première tache consiste à identifier la chaîne d'action A(p) et la chaîne de réaction B(p). Il s'agit alors de mettre le système en équations. On étudie ensuite sa stabilité en boucle fermée à partir de sa fonction de transfert en boucle ouverte, ou bien directement à partir de sa fonction de transfert en boucle fermée. Un cas particulier important est celui des conditions de juste oscillation.

On considère le schéma de la figure 1 où les amplificateurs opérationnels sont supposés idéaux et α et β sont deux constantes réelles positives.

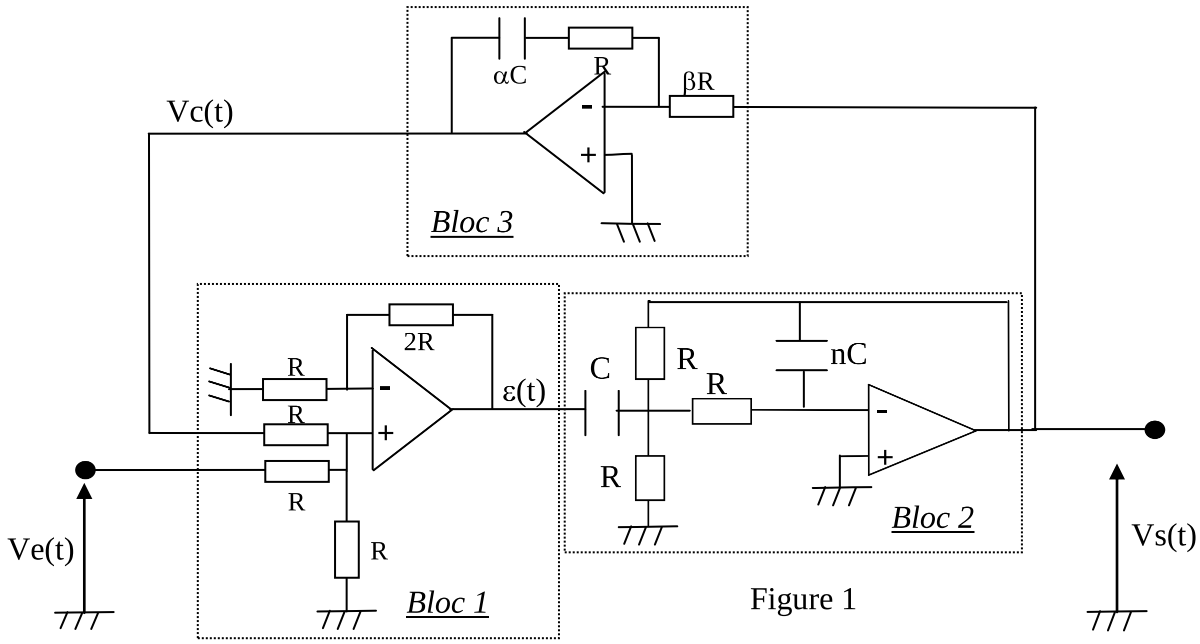


Figure 1

I. Identification et mise en équations **(exercice à rendre à l'encadrant)**

a / Etudier les blocs 1 et 3 séparément. On calculera en particulier la fonction de transfert $G_3(p)$ du bloc 3.

b / Le bloc 2 correspond à la structure de Rauch étudiée au TD1 et dont la relation a été donnée au TD2. Rappeler la fonction de transfert $G_2(p)$ du bloc 2.

c / Mettre le système sous la forme du schéma fonctionnel de la figure 2. Calculer A(p) et B(p).

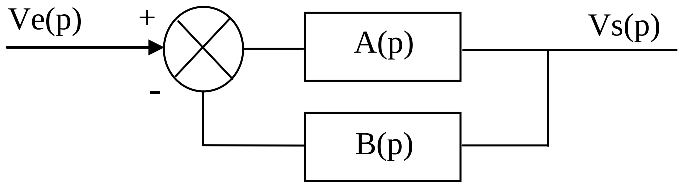


Figure 2

d / Montrer que la fonction de transfert en boucle ouverte T(p) du système se met sous la forme

$$T(p) = K\frac{1+\dfrac{p}{\omega_1}}{\left(1+2m\dfrac{p}{\omega_0}+\left(\dfrac{p}{\omega_0}\right)^2\right)} \qquad \text{avec} \begin{cases} \omega_1 = \dfrac{1}{\alpha RC} \\ \omega_0 = \dfrac{1}{RC\sqrt{n}} \text{ et } m = \dfrac{3}{2}\sqrt{n} \\ K = \dfrac{-1}{\alpha\beta} \end{cases}$$

et que la fonction de transfert en boucle fermée H(p) se met sous la forme

$$H(p) = \frac{ap}{p^2+bp+c} \qquad \text{avec} \begin{cases} a = \dfrac{-1}{nRC} \\ b = \dfrac{(3n\beta-1)}{\beta nRC} \\ c = \dfrac{\alpha\beta-1}{\alpha\beta nR^2C^2} \end{cases}$$

II. Etude de la stabilité à partir de T(p)

a / On choisit n = 0,01. Quelle est la nature de $G_2(p)$ du point de vue du filtrage ? Préciser en particulier la valeur du facteur de qualité.

b / Après avoir estimé les positions respectives de ω_1 et ω_0 en fonction de α, tracer le ou les diagramme(s) de Bode asymptotique(s) de $T(j\omega)$.

c / En déduire le ou les diagramme(s) de Nyquist correspondants, et conclure quant à la stabilité du système suivant les valeurs de α et β. Quelle est la validité de ce résultat ?

III. Etude de la stabilité à partir de H(p)

a / Etudier directement la position des pôles de H(p) et en déduire la condition que doit vérifier le couple (α,β) pour que le système soit stable.

b / Quelle(s) valeur(s) de (α,β) donne(nt) une oscillation sinusoïdale pure ? Quelle est ou quelles sont la ou les fréquences correspondantes ? Expliciter l'expression de Vs(t) à un bruit de la forme $Ve(t)=0+k\times\delta(t)$ (k en volt×seconde).

IV. Etude spécifique de l'oscillateur

1. Démarrage

Retrouver le cas limite de l'oscillateur par application de la condition de Barkhausen. En pratique, quelle est la condition à réaliser pour qu'un régime d'oscillations prenne naissance ? Quel type de phénomène subit nécessairement l'oscillation ?

2. Régime permanent

L'étude du régime permanent est faite dans le cas où n = 0,01 et $\alpha = 1$. On intercale entre la sortie du bloc 1 et l'entrée du bloc 2 une non-linéarité (voir figure 3) qui possède les propriétés suivantes :

- dès que l'amplitude de $\varepsilon(t)$ est positive, la tension de sortie V(t) de la non-linéarité est constante et égale à V_0,
- dès que l'amplitude de $\varepsilon(t)$ est négative, la tension de sortie V(t) de la non-linéarité est constante et égale à $-V_0$.

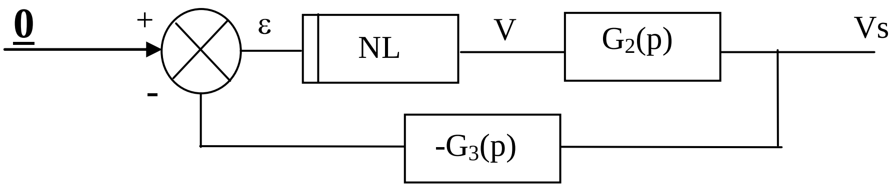


Figure 3

a / La nature de $G_2(p)$ en terme de filtrage a été étudiée en II. Qu'en est-il pour $G_3(p)$? Lequel de ces deux éléments assure le filtrage des harmoniques éventuellement générés par la non-linéarité ?

b / Calculer le rapport entre l'amplitude de l'harmonique 3 et l'amplitude du fondamental en supposant que la pulsation de $\varepsilon(t)$ est très proche de ω_0. L'approximation du premier harmonique vous paraît-elle justifiée ?

c / Tracer la caractéristique $V=f(\varepsilon)$. Calculer le gain de la non-linéarité pour le premier harmonique, que l'on notera N(X), où X représente l'amplitude de $\varepsilon(t)$: $\varepsilon(t)=X \sin(2\pi ft)$. Quelle est la particularité de N(X) ?

d / On suppose qu'une oscillation est apparue, dont l'amplitude se trouve limitée par la non-linéarité. On impose $V_0 = 0,25$. Quelles sont dans ces conditions la fréquence et l'amplitude des oscillations de Vs(t) ?