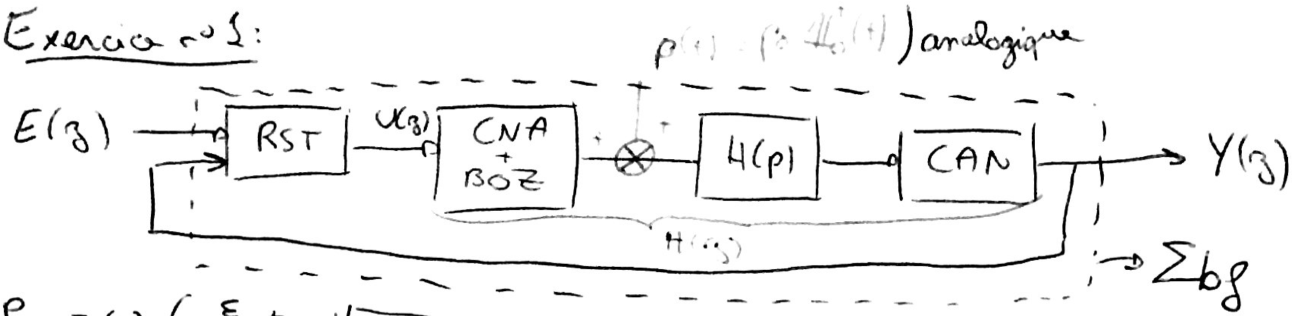
UE 421

# TD 4 - Correcteur RST

## Exercice n° 1 :

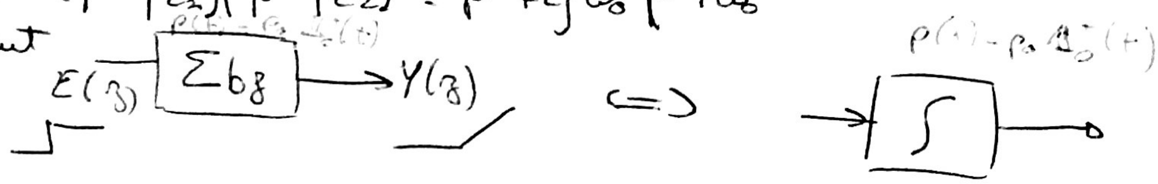



$$\begin{cases} P_{c1,2} = \omega_0 \left( -\xi \pm j\sqrt{1-\xi^2} \right) \\ P_{c3} = -3\omega_0 \xi \end{cases} \quad \omega_0 = 1,5 \text{ rad.s}^{-1} \text{ et } \xi = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,7$$

$$\boxed{z_i = e^{T_e P_{ci}}} \quad i = 1, 2, 3$$

**SNR** : $(p - P_{c1})(p - P_{c2}) = p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2$

On veut



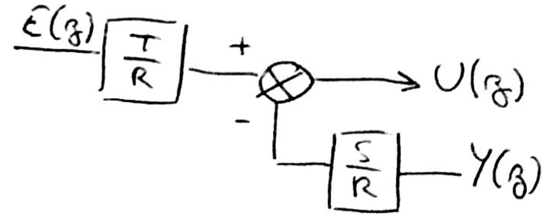

1) $R(z)U(z) = -S(z)Y(z) + T(z)E(z)$

↳ structures : (i) $U(z) = -\frac{S}{R} Y(z) + \frac{T}{R} E(z)$ — causalité des correcteurs $\begin{cases} \sigma \leq \rho \\ \tau \leq \rho \end{cases}$

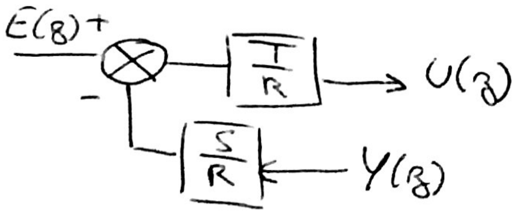
(ii) $U(z) = \frac{T}{R}\left[ E(z) - \frac{S}{T} Y(z) \right]$ — $\begin{cases} \tau \leq \rho \\ \sigma \leq \tau \end{cases}$

(iii) $U(z) = \frac{S}{R}\left[ \frac{T}{S} E(z) - Y(z) \right]$ — $\begin{cases} \sigma \leq \rho \\ \tau \leq \sigma \end{cases}$

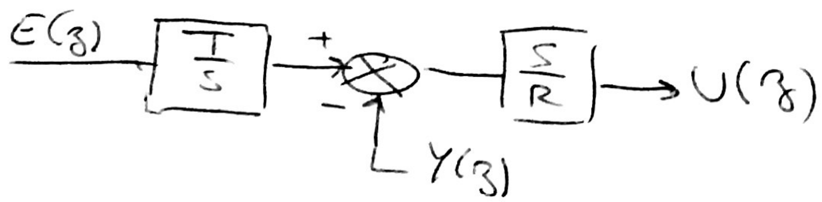
modèle (i)



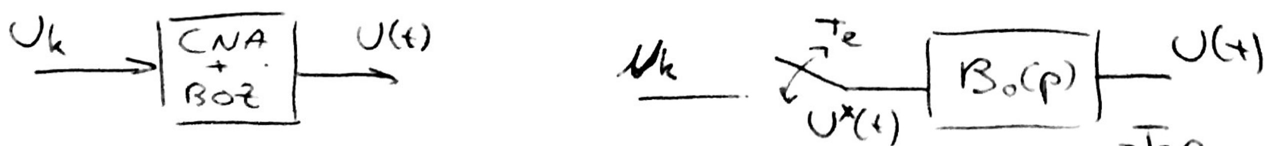

modèle (ii)




modèle (iii)




2)




$$B_0(p) = \frac{1 - e^{-T_e p}}{p}$$

$U(p) = B_0(p)\,U^*(p)$

$Y(p) = H(p)U(p) + H(p)P(p)$ où $P(p) = \frac{P_0}{p}$

$Y(p) = H(p)\,B_0(p)\,U^*(p) + H(p)\,\frac{P_0}{p}$

$= A(p)\,U^*(p) - e^{-T_e p}A(p)\,U^*(p) + A(p)\,P_0$ où $A(p) = H(p) = \mathcal{L}\{a(t)\}$

Posons $B(p) = A(p)\,U^*(p)$

$\downarrow \mathcal{L}^{-1}\{\ \}$

$b(t) = a(t) * U^*(t)$

$Y(t) = b(t) - b(t - T_e) + a(t)\,P_0 \xrightarrow[t=nT_e]{\text{discrétisation}} Y_n = b_n - b_{n-1} + a_n P_0$

$\downarrow Z\{\ \}$

$Y(z) = B(z) - z^{-1}B(z) + A(z)P_0$

or, $b_n = a_n * U_n$ donc $B(z) = A(z)U(z)$

Ainsi, $Y(z) = (1 - z^{-1})\,A(z)\,U(z) + A(z)\,P_0$

$= \underbrace{(1 - z^{-1})A(z)U(z)}_{} + \underbrace{\frac{z-1}{z}A(z)\,\frac{P_0 z}{z-1}}_{}$

$= H(z)\,U(z) + H(z)\,P(z)$ avec $P(z) = \frac{P_0 z}{z-1} = Z(P_0)$

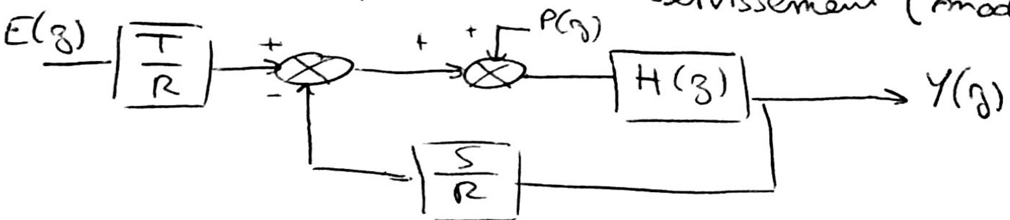
$Y(z) = H(z)\,(U(z) + P(z))$

→ NB : Pour $p(t)$ qcq $Y(z) = H(z)U(z) + Z\{{}^*\mathcal{L}^{-1}\{H(p)P(p)\}\}$

3) Calcul de R & S

a) On choisit une structure de RST $\begin{cases} S \leq R \\ T \leq R \end{cases}$

b) Mise en équation de l'asservissement (modèle (i))




→ Rappel : $H(z) = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0} = \frac{b_1 z + b_0}{(z-1)(z-D)}$ avec $D = e^{-T_e/2}$

numériquement : $b_1 \simeq 0{,}07576$
$b_0 \simeq 0{,}052848$
$a_1 \simeq -1{,}3679$
$a_0 \simeq 0{,}3679$

$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$
$n = \deg A = 2$
$m = \deg B = 1$

$Y(z) = \frac{BT}{AR + BS}\,E(z) + \frac{BR}{AR + BS}\,P(z)$

c) formulation du pb de placement de pôles

$$\Pi_d(z) = (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$$
$$= z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0 \quad , \quad q = \deg(\Pi_d) = 3$$

où $c_2 = -(e^{-3\omega_0 \xi T_e} + 2e^{-\omega_0 \xi T_e} \cdot \cos(\Omega T_e))$ où $\Omega = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$

$c_1 = (e^{-2\omega_0 \xi T_e} + 2e^{-4\omega_0 \xi T_e} \cos(\Omega T_e))$

$c_0 = -e^{-5\omega_0 \xi T_e}$

Ainsi $\begin{cases} c_2 \approx -2{,}1106 \\ c_2 \approx -1{,}8912 \\ c_0 \approx -0{,}34623 \end{cases}$

$\forall E(z)$, on voudrait pour $n \to \infty$ que $Y(z)$ soit indépendant de $P_0$ pour $E(z)=0$

on veut $\lim_{n\to\infty} Y_n = 0 = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} Y(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} \frac{P_0 R}{AR+P_0 S} \cdot \frac{P_0 z}{z-1}$

Or, on veut aussi $\boxed{AR+BS = \Pi_d}$ → Eq diophantine.

$\lim_{z\to 1} \frac{B R P_0}{AR+BS} = 0 \iff R(z) = (z-1)^p \tilde{R}(z)$ où $p \in \mathbb{N}^+$ et $\tilde{R}(z)$ monique

On prend $p = 1$ par simplicité.

Eq diophantine devient : $\underbrace{A(z)(z-1)}$ $\tilde{R}(z) + B(z) S(z) = \Pi_d(z)$

$\tilde{A}(z) R(z) + B(z) S(z) = \Pi_d(z)$ et $\begin{cases} \tilde{\rho} = \deg(\tilde{R}) \\ \tilde{m} = \deg(\tilde{A}) = m+1 = 3 \end{cases}$

② Egalité des degrés des polynomes

(i) $\deg(\tilde{A}\tilde{R} + BS) = \deg(\Pi_d) \iff \deg(\tilde{A}\tilde{R}) = 3$

$\iff \boxed{\tilde{m} + \tilde{\rho} = q}$ car $q = \deg(\Pi_d)$

(ii) égalité du nbre d'inconnues avec nombre d'équation

$\tilde{\rho} + \sigma + 1 = q = \tilde{m} + \tilde{\rho}$ ) $\iff \boxed{\sigma = \tilde{m} - 1}$

(iii) Causalité

$\sigma \leq \rho = \tilde{\rho} + 1 \iff \tilde{m} - 1 \leq q - \tilde{m} + 1 \iff q \geq 2\tilde{m} - 2 = 4$

⚠ ce n'est pas vérifié pour $q = 3$

NB : But original du TD :

Trouver un polynôme ! $\frac{BT}{AR+BS} = \frac{B_d}{\Pi_d} \frac{A_k}{A_0}$ ← polynôme auxiliaire de degré k inconnu.

eq diophantine devient → $AR + BS = \Pi_d A_0$

$\iff \tilde{A}\tilde{R} + BS = \Pi_d A_0$

(i) égalité de degrés $\tilde{m} + \tilde{\rho} = q + k$

(ii) égalité du nombre d'inconnues et du nbre d'équation

$\tilde{\rho} + \sigma + 1 = q + k$
$= \tilde{m} + \tilde{\rho}$ ) → $\boxed{\sigma = \tilde{m} - 1} = 3$

(iii) $\sigma \leq \rho = \hat{\rho} + \delta \iff \tilde{n} - 1 \leq q + k - \tilde{n} + 1$

$\iff k \geq 2\tilde{n} - 2 - q = k_{min} = 1$

On prend $k = 2$ même si il faut en général prendre ~~k~~ le plus petit possible

$A_0(z) \to$ monique

→ Rappel : $Y(z) = \frac{BT}{AR+BS} E(z) + \frac{BR}{AR+BS} P(z)$

$= \frac{Bd}{\pi d} E(z) + \frac{BR}{\pi d A_0} P(z)$

$Hd(z)$

$A_0(z) \to$ Racines ~~stables~~, et plus rapides que les pôles $P_{ci}$

$A_0(z) = (z-0)^k = z^2$

$\pi d A_0 = z^3 + \tilde{C}_4 z^4 + \tilde{C}_3 z^3 + C_2 z^2 + \cdots$

$$\begin{cases} \tilde{C}_4 = C_2 \\ \tilde{C}_3 = C_1 \\ \tilde{C}_2 = C_0 \end{cases}$$

$k = 2 \to \sigma = 2 \to S(z) = s_2 z^2 + s_1 z + s_0$

$\tilde{\rho} = 2 \to \tilde{R}(z) = z^2 + \tilde{r}_1 z + \tilde{r}_0$

$\tilde{\rho}$ colonnes, $\sigma + 1$ colonnes

$\tilde{A}\tilde{R} + BS = \tilde{\pi}_d \iff$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{a}_2 & 1 & b_1 & 0 & 0 \\ \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 & b_0 & b_1 & 0 \\ \tilde{a}_0 & \tilde{a}_1 & 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & \tilde{a}_0 & 0 & 0 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_0 \\ s_2 \\ s_1 \\ s_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_4 - \tilde{a}_2 \\ \tilde{C}_3 - \tilde{a}_2 \\ \tilde{C}_2 - \tilde{a}_0 \\ \tilde{C}_1 - \\ \tilde{C}_0 - \end{bmatrix}$$

h) $Hd(z) = \frac{Bd(z)}{\pi d(z)}$ ?

$E(z) = \frac{E_0 z}{z-1}$

$\mathcal{Z}\{E_0\} \longrightarrow \boxed{Hd(z)} \longrightarrow Y(z) = \frac{E_0 T_e z}{(z-1)^2} = \mathcal{Z}\{E_0 T_e k\}$

$Y(z) = Hd(z)\, E(z)$

$\frac{E_0 T_e z}{(z-1)^2} = Hd(z) \frac{E_0 z}{z-1}$

$$\boxed{Hd(z) = \frac{T_e}{z-1}} = \frac{Bd(z)}{\pi d(z)}$$

or, $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0}$

$n - m = 2 - 1 = 1$

$q - \mu = 1 - 0 = 1$

$\boxed{q - \mu \geq n - m}$ OK

critère de ~~stabilité~~ conformité d'un zéro = stabilité

Les zéros sont-ils conforme (stable) ?

$B(z) = b_1 \left(z + \frac{b_0}{b_1}\right)$

$\left|-\frac{b_0}{b_1}\right| < 1 \to$ zéro conforme
↳ simplifiable ou non

$\left|-\frac{b_0}{b_1}\right| \geq 1 \to$ zéro non conforme
non-simplifiable.

$T_e = 2 \quad D = e^{-1} \quad \sigma$

or, $b_0 = T_e(1-2D) \approx 0{,}052848$

$b_1 = T_e D \approx 0{,}073576$

donc $\left|\frac{b_0}{b_1}\right| < 1$

En bf, on veut aussi $P_d$, $P^2_d$, $P^3_d$

$\Rightarrow \underbrace{A_0(z)}_{\text{monique}} = \underbrace{\tilde{A}_0(z)}_{\text{monique}}(z - P_d)(z - P^2_d)(z - P^3_d)$

$H_d(z) = \frac{B_d}{\Pi_d} \cdot \frac{A_0}{A_0} \Rightarrow \frac{BT}{AR+BS} = \frac{B_d \cdot A_0}{\Pi_d \cdot A_0}$

$BT = B_d A_0$ et $AR + BS = \Pi_d \cdot A_0$

Rappel: $Y(z) = \frac{BT}{AR+BS} E(z) + \frac{BR}{AR+BS} P(z)$ pour $E(z) = 0$ & $P(z) = \frac{P_0 z}{z-1}$

On veut $\lim_{k \to +\infty} y_k = 0 \ \forall P_0$

$\lim_{z \to 1} \frac{z-1}{z} Y(z) = 0 \ \forall P_0$

$\Leftrightarrow \lim_{z \to 1} \cancel{\frac{z-1}{z}} \frac{BR}{\Pi_d A_0} \frac{P_0 \cancel{z}}{\cancel{z-1}} = 0 \ \forall P_0$

$\Leftrightarrow \lim_{z \to 1} \frac{BRP_0}{\Pi_d A_0} = 0 \Leftrightarrow R(z) = (z-1)^\rho \tilde{R}(z)$ et $\rho \geq 2$

on prend $\rho = 2$ et $\tilde{R}(z)$ monique

$AR + BS = \Pi_d A_0$

$\underbrace{A(z)(z-1)^2}_{\tilde{A}(z)} \tilde{R}(z) + B(z) S(z) = \Pi_d(z) A_0(z)$

or, $B(z) = B_s(z) B_{ns}(z)$ où $B_s(z)$ contient le zéro à simplifier

on a $\frac{B_s B_{ns} T}{\tilde{A}\tilde{R} + B_s B_{ns} S} = \frac{B_d A_0}{\Pi_d A_0}$ et $R(z) = B_s(z) \check{R}(z)$ monique $\check{\rho} \deg(\check{R})$

$B_s(z) = (z + \frac{b_0}{b_1})$

$B_{ns}(z) = b_1$

éq diophantine $\tilde{A}\check{R} + B_{ns} S = \Pi_d A_0 = \tilde{\Pi}_d$

$\tilde{n} = \deg(\tilde{A}) = n + \rho = 4$

$m_{ns} = \deg(B_{ns}) = 0 \quad m_{ns} < \tilde{n}$

i) $\tilde{n} + \check{\rho} = q + k$ avec $\underline{k \geq 3}$

ii) $\check{\rho} + \sigma + 1 = q + k \Rightarrow \sigma = \tilde{n} - 1 = 3$

iii) Causalité de $\frac{S(z)}{R(z)}$ $\quad \sigma \leq \rho$

$\tilde{n} - 1 \leq \rho + m_s + \check{\rho} = \rho + m_s + q + k - \tilde{n}$

$k \geq \underbrace{2\tilde{m} - 1 - q - l - m_s}_{k_{min}} = 2 \times 4 - 1 - 1 - 2 - 1 = 3$

On choisit $k = k_{min} = 3$ $\quad \check{\ell} = q + k - \tilde{m} = 1 + 3 - 4 = 0$

$\boxed{\check{R}(z) = 1}$

$R(z) = (z-1)^2 \left(z + \frac{b_0}{b_1}\right)$

$A_0(z) = (z - P_{1d})(z - P_{2d})(z - P_{3d})$

$A_0(z) = z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0$ $\quad c_0\ c_1\ c_2$ données précédemment

or, $B_{ms}(z) = b_1$

$S(z) = \frac{1}{b_1}\left(\tilde{\Pi}_d(z) A_0(z) - \tilde{A}(z)\right) = s_3 z^3 + s_2 z^2 + s_1 z + s_0$

avec $s_j = \frac{\tilde{c}_j - \tilde{a}_j}{b_1}$ $\quad j = 0, 1, 2, 3$

où $\tilde{\Pi}_d(z) = \Pi_d(z) A_0(z) = z^4 + \tilde{c}_3 z^3 + \tilde{c}_2 z^2 + \tilde{c}_1 z + \tilde{c}_0$

où $\tilde{c}_3 = c_2 - 1$ $\quad \tilde{c}_1 = c_0 - c_1$

$\tilde{c}_2 = c_1 - c_2$ $\quad \tilde{c}_0 = -c_0$

$\tilde{A}(z) = (z-1)^2 A(z) = z^4 + \tilde{a}_3 z^3 + \tilde{a}_2 z^2 + \tilde{a}_1 z + \tilde{a}_0$

avec $\tilde{a}_3 = a_1 - 2$

$\tilde{a}_2 = 1 - 2a_1 + a_0$

$\tilde{a}_1 = a_1 - 2a_0$

$\tilde{a}_0 = a_0$

$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \underbrace{B_{ms}(z)}_{= b_1} T(z) = \underbrace{B_d(z)}_{= T_e} A_0(z)$

$\alpha = \frac{T_e}{b_1} \longrightarrow \boxed{T(z) = \frac{T_e}{b_1} A_0(z)}$