

## TRAVAUX PRATIQUES

### Avertissement

Les travaux pratiques (TP) doivent être impérativement préparés par tous les étudiants avant le début de la séance avec une préparation écrite par binôme. La préparation comprend non seulement la lecture de l'ensemble du sujet, sa compréhension, la réponse aux questions posées mais également la lecture attentive de la syntaxe des commandes de Matlab™ données dans l'énoncé. Vous devez également réfléchir à la partie manipulation et, entre autres, prévoir quand ces commandes seront nécessaires et comment vous ferez pour les utiliser. Les séances de TP sont conçues pour durer 4 heures, hors préparation.

Le compte-rendu de manipulation sera rédigé pendant la séance de TP (un compte-rendu par binôme). Les résultats expérimentaux devront être commentés et illustrés par des impressions de courbes judicieusement choisies, les axes et les unités étant précisés. Les programmes seront joints au compte-rendu.

Il est très important que la préparation et le compte-rendu de manipulation soient très bien rédigés afin de constituer un complément du cours. Toutes les réponses aux questions doivent être clairement argumentées tout en étant concises. L'ensemble préparation - compte-rendu sera remis à l'enseignant à la fin de la séance de TP.

Tous les documents sont autorisés pour la préparation du TP et pendant la séance. Il est même vivement conseillé de consulter des ouvrages bibliographiques lors de la préparation. Il est acceptable de discuter entre vous et avec votre entourage, et de vous entre-aider lors de la préparation du TP. Ces discussions et échanges doivent vous aider à réfléchir et à acquérir et maîtriser les connaissances en lien avec les thèmes abordés ; cependant la préparation et le compte-rendu doivent être personnels. Il faut mieux aborder un peu moins de points et avoir bien assimilé ce qui a été fait que de recopier des résultats sans avoir acquis les connaissances correspondantes, ce qui est de plus passible d'une sanction.

Si vous ne savez pas répondre à certaines questions, identifiez ce que vous n'avez pas compris, explicitez-le et n'hésitez pas à contacter l'équipe enseignante de l'UE.

### Notation des travaux pratiques

Une note, sur 5 points, de préparation est attribuée à chaque étudiant. Le travail de chaque étudiant pendant la séance, sa volonté de comprendre ce qui est fait et de progresser, sa pugnacité, son autonomie et la réponse aux sollicitations de l'enseignant sont notés sur 5 points. Le compte-rendu de manipulation est noté sur 10 points. Tous les TP sont notés.

Cécile DURIEU





# TP 1/3 – CORRÉLATION, FILTRAGE ADAPTÉ ET MESURE DE LA VITESSE DU SON

La première partie de ce TP concerne l'estimation de la fonction de corrélation de différents signaux et le filtrage d'un bruit blanc. Deux applications sont ensuite envisagées : elles concernent le filtrage adapté et la détermination de la vitesse de propagation du son. Au préalable, des rappels sur la fonction de corrélation temporelle sont donnés avant de définir la fonction de corrélation statistique de signaux aléatoires.

Dans tous les énoncés des TP, les notations suivantes sont utilisées :

–  $x$  est un scalaire, réelle ou complexe ( $x \in \mathbb{R}$  ou  $x \in \mathbb{C}$ ),

–  $\mathbf{x}$  est un vecteur colonne :  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = (x_1 \ \cdots \ x_n \ \cdots \ x_N)^T$  ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  ou  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ ),

–  $\mathbf{X}$  est une matrice de dimension  $N \times P$  :  $\mathbf{X} = (x_{np}) = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1P} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{N1} & \cdots & x_{NP} \end{pmatrix}$  ( $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N \times P}$  ou  $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{N \times P}$ ).

## I/ CORRÉLATION

### I.1/ CORRÉLATION TEMPORELLE

#### I.1.1/ Signaux d'énergie finie

On considère des signaux déterministes (SD) ou aléatoires (SA), scalaires et d'énergie finie. La fonction d'intercorrélation (IC) temporelle d'énergie des signaux à temps continu (TC)  $x(t)$  et  $y(t)$  ( $t$  réel et scalaire) est définie par

$$c_{xy}^E(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau) dt. \quad (1)$$

La fonction d'intercorrélation temporelle d'énergie des signaux à temps discret (TD)  $x_n$  et  $y_n$  ( $n$  entier) est définie par

$$c_{xy}^E[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n y_{n-k}^*. \quad (2)$$

La fonction d'intercorrélation d'énergie de certains signaux d'énergie infinie existe (au sens des fonctions ou des distributions) ; par exemple, une impulsion de Dirac a une fonction d'autocorrélation d'énergie qui est une impulsion de Dirac.

Si  $x = y$ , on parle alors de fonction d'autocorrélation (AC). La fonction d'autocorrélation d'énergie d'un signal  $x$  à l'origine ( $c_{xx}^E(0)$  ou  $c_{xx}^E[0]$ ) n'est autre que l'énergie du signal, notée  $E_x$ .

#### Préparation 1 :

– Démontrer que  $\forall \tau \in \mathbb{R} \quad |c_{xx}^E(\tau)| \leq c_{xx}^E(0) = E_x$  et  $c_{xy}^E(-\tau) = c_{yx}^{E*}(\tau)$ , et  $\forall k \in \mathbb{Z} \quad |c_{xx}^E[k]| \leq c_{xx}^E[0] = E_x$  et  $c_{xy}^E[-k] = c_{yx}^{E*}[k]$ .

– Vérifier que la fonction d'intercorrélation temporelle peut s'écrire sous la forme d'un produit de convolution qui sera explicité.

– En déduire l'expression de la fonction d'intercorrélation temporelle en fonction de la transformée de Fourier des signaux considérés,  $X(f)$  et  $Y(f)$ .

– Retrouver le théorème de Parseval pour des signaux à temps continu et à temps discret.

#### I.1.2/ Signaux de puissance finie

On considère maintenant des signaux, déterministes ou aléatoires, scalaires et de puissance finie. La fonction d'intercorrélation temporelle de puissance des signaux à temps continu  $x(t)$  et  $y(t)$  est définie par

$$c_{xy}^P(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)y^*(t-\tau) dt. \quad (3)$$

La fonction d'intercorrélation temporelle de puissance des signaux à temps discret  $x_n$  et  $y_n$  est définie par

$$c_{xy}^P[k] = \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{n=-K}^{+K} x_n y_{n-k}^*. \quad (4)$$

Si un des signaux a une énergie finie (sa puissance est donc nulle), la fonction d'intercorrélation de puissance est nulle (majoration de l'intégrale ou de la somme). La fonction d'intercorrélation de certains signaux de puissance infinie existe

(au sens des fonctions ou des distributions) ; par exemple, la fonction d'autocorrélation d'un bruit blanc (qui est un signal aléatoire) à temps continu est une impulsion de Dirac. Un bruit blanc à temps discret a une fonction d'autocorrélation qui est une impulsion.

Si  $x = y$ , on parle alors de fonction d'autocorrélation. La fonction d'autocorrélation de puissance du signal  $x$  à l'origine n'est autre que l'énergie du signal, notée  $P_x$ .

Les propriétés établies pour la corrélation d'énergie sont également valables pour la corrélation de puissance, à savoir :  $\forall \tau \in \mathbb{R} \quad |c_{xx}^P(\tau)| \leq c_{xx}^P(0) = P_x$  et  $c_{xy}^P(-\tau) = c_{yx}^{P*}(\tau)$ , et  $\forall k \in \mathbb{Z} \quad |c_{xx}^P[k]| \leq c_{xx}^P[0] = P_x$  et  $c_{xy}^P[-k] = c_{yx}^{P*}[k]$ .

## II/ CORRÉLATION STATISTIQUE

On considère des signaux aléatoires stationnaires dans leur ensemble (SAS), c'est-à-dire que toutes leurs propriétés statistiques sont invariantes par tout changement d'origine des temps. La fonction d'intercorrélation statistique de tels signaux scalaires à temps continu  $x(t)$  et  $y(t)$  est définie par

$$\gamma_{xy}(\tau) = E[x(t)y^*(t-\tau)], \quad (5)$$

où  $E[Z]$  est la moyenne statistique de la variable aléatoire (VA)  $Z$ . La fonction d'intercorrélation statistique des signaux à temps discret  $x_n$  et  $y_n$  est définie par

$$\gamma_{xy}[k] = E[x_n y_{n-k}^*]. \quad (6)$$

Si  $x = y$ , la fonction de corrélation statistique s'appelle fonction d'autocorrélation statistique.

### Préparation 2 :

– On démontre que l'on peut permuter les opérateurs espérance et conjugaison complexe (cf. cours). Vérifier que  $\gamma_{xy}(-\tau) = \gamma_{yx}^*(\tau)$  et  $\gamma_{xy}[-k] = \gamma_{yx}^*[k]$ .

On établit également que  $\forall \tau \in \mathbb{R} \quad |\gamma_{xx}(\tau)| \leq \gamma_{xx}(0)$  et  $\forall k \in \mathbb{Z} \quad |\gamma_{xx}[k]| \leq \gamma_{xx}[0]$ . Ainsi les propriétés établies pour la corrélation temporelle sont également valables pour la corrélation statistique. Le fait que le module de l'autocorrélation est maximum à l'origine est exploité dans ce TP.

Si les signaux aléatoires sont stationnaires et ergodiques (SASE) dans leur ensemble, notions qui seront vues en cours, la fonction de corrélation statistique est égale à la fonction de corrélation temporelle de puissance, ainsi (5) peut être calculée à partir de (3), et (6) à partir de (4). La fonction de corrélation statistique peut donc être obtenue à partir d'une seule et unique réalisation des signaux aléatoires allant de  $-\infty$  à  $+\infty$ , encore appelée trajectoire.

Un bruit blanc est un signal aléatoire stationnaire et ergodique avec une fonction d'autocorrélation qui est une impulsion, impulsion de Dirac pour un bruit blanc à temps continu, et impulsion centrée à l'origine pour un bruit blanc à temps discret. La transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation d'un signal aléatoire stationnaire, encore appelée densité spectrale de puissance (dsp), est une constante pour un bruit blanc. Un bruit blanc a une valeur moyenne nulle.

## II/ ESTIMATEURS DE LA CORRÉLATION

### II.1/ ÉCHANTILLONNAGE

Le plus souvent, on traite des signaux qui sont échantillonnés. Ainsi on ne connaît que ces signaux qu'aux instants  $t_n = nT_e$ ,  $F_e = 1/T_e$  étant la fréquence d'échantillonnage. Les fonctions d'intercorrélation temporelles des signaux à temps continu sont alors calculées à partir des signaux échantillonnés. Si la fréquence d'échantillonnage est *suffisamment* élevée, la fonction d'intercorrélation temporelle d'énergie des signaux à temps continu calculée en  $\tau = kT_e$  est *à peu près égale*, à un coefficient  $T_e$  près, à la fonction d'intercorrélation temporelle d'énergie des signaux échantillonnés calculée en  $k$ . Dans les mêmes conditions, la fonction d'intercorrélation temporelle de puissance des signaux à temps continu calculée en  $\tau = kT_e$  est *à peu près égale* à la fonction d'intercorrélation temporelle de puissance des signaux échantillonnés calculée en  $k$ . On démontre que, si les signaux sont à bande limitée de fréquence maximale inférieure à  $F_e/2$ , l'erreur commise est nulle et la fonction d'intercorrélation calculée à partir des signaux échantillonnés correspond à un échantillonnage de la fonction d'intercorrélation des signaux à temps continu.

Un autre point est que, dans la pratique, la durée d'observation est finie. Ainsi on ne peut qu'estimer les fonctions de corrélation temporelles à partir des signaux échantillonnés sur cet horizon. Le résultat dépend de cet horizon d'observation. L'erreur d'estimation est d'autant *plus faible* que l'horizon d'observation est *grand*.

### II.2/ ESTIMATEURS

On considère deux signaux à temps discret  $x_n$  et  $y_n$  observés sur  $N$  points ( $n = 1, \dots, N$ ). Les signaux observés peuvent être considérés comme étant les signaux initiaux multipliés par une fenêtre de pondération qui vaut 1

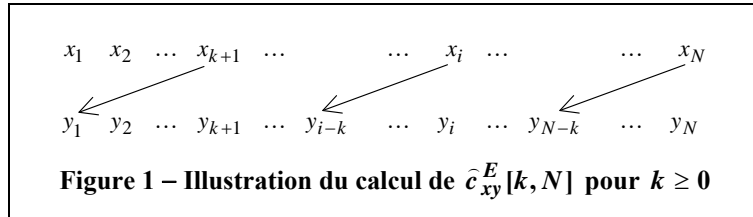
pendant la durée d'observation et 0 ailleurs (fenêtre naturelle). La fonction d'intercorrélation des signaux  $x$  et  $y$  va être calculée, ou encore estimée, à partir des signaux observés. L'estimateur de la fonction d'intercorrélation dépend de  $N$ .

La fonction d'intercorrélation temporelle d'énergie  $c_{xy}^E[k]$  peut être estimée par

$$\hat{c}_{xy}^E[k, N] = \sum_{n=k+1}^N x_n y_{n-k}^* \quad \text{si } k \geq 0 \text{ et } k < N, \quad (7)$$

$$\hat{c}_{xy}^E[k, N] = \sum_{n=1}^{N-|k|} x_n y_{n-k}^* \quad \text{si } k \leq 0 \text{ et } k > -N, \quad (8)$$

$$\hat{c}_{xy}^E[k, N] = 0 \quad \text{sinon.} \quad (9)$$



La fonction d'intercorrélation temporelle de puissance  $c_{xy}^P[k]$  peut être estimée par

$$\hat{c}_{xy}^P[k, N] = \frac{1}{N-k} \sum_{n=k+1}^N x_n y_{n-k}^* \quad \text{si } k \geq 0 \text{ et } k < N, \quad (10)$$

$$\hat{c}_{xy}^P[k, N] = \frac{1}{N-|k|} \sum_{n=1}^{N-|k|} x_n y_{n-k}^* \quad \text{si } k \leq 0 \text{ et } k > -N, \quad (11)$$

$$\hat{c}_{xy}^P[k, N] = 0 \quad \text{sinon.} \quad (12)$$

On démontre que, pour des signaux stationnaires et ergodiques, cet estimateur de la fonction d'intercorrélation est non biaisé, c'est-à-dire que  $\forall |k| \leq N \quad \mathbb{E}[\hat{c}_{xy}^P[k, N]] = \gamma_{xy}[k] = c_{xy}^P[k]$ . Ceci revient à dire que si on calcule l'intercorrélation temporelle pour un *très grand* nombre de trajectoires tronquées et effectue ensuite la moyenne d'ensemble, on obtient l'intercorrélation statique. Dans la suite de ce TP, cet estimateur est utilisé. Pour certaines applications (cf. TP 2), on préfère un autre estimateur biaisé mais ayant une variance ou encore une dispersion de part et d'autre la valeur moyenne plus faible :

$$\hat{c}_{xy}^P[k, N] = \frac{1}{N} \sum_{n=k+1}^N x_n y_{n-k}^* \quad \text{si } k \geq 0 \text{ et } k < N, \quad (13)$$

$$\hat{c}_{xy}^P[k, N] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-|k|} x_n y_{n-k}^* \quad \text{si } k \leq 0 \text{ et } k > -N, \quad (14)$$

$$\hat{c}_{xy}^P[k, N] = 0 \quad \text{sinon.} \quad (15)$$

### Préparation 3 :

- Justifier rapidement l'estimateur de la fonction d'intercorrélation d'énergie (équations (7) à (9)).
- Justifier l'expression de l'estimateur non biaisé de la fonction d'intercorrélation de puissance (équations (10) à (12)).
- Vérifier que cet estimateur est non biaisé alors que le deuxième l'est (équations (13) à (15)).

## II.3/ CALCUL DE LA CORRÉLATION ESTIMÉE

Une fonction qui calcule les estimateurs des fonctions d'intercorrélation des signaux  $x(t)$  et  $y(t)$  à partir des signaux échantillonnés sur  $N$  points à la fréquence  $F_e$  va être écrite et ensuite l'influence de la durée d'observation étudiée. On note  $x_n$  et  $y_n$  les signaux observés ( $n=1, \dots, N$ ) et pose  $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N)^T$  et  $\mathbf{y} = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_N)^T$ .

### Préparation 4 :

- À  $k$  donné, plutôt que de calculer la somme intervenant dans la corrélation sous forme d'une boucle, on préfère calculer un produit scalaire entre deux vecteurs de dimension  $(N - |k|)$ . Préciser ces deux vecteurs pour  $k \geq 0$  puis pour  $k < 0$ .
- Lire l'aide de Matlab™ donnée ci-dessous.

---

## Commandes de Matlab™

### - **function** Add new function.

New functions may be added to Matlab's vocabulary if they are expressed in terms of other existing functions. The commands and functions that comprise the new function must be put in a file whose name defines the name of the new function, with a filename extension of '.m'. At the top of the file must be a line that contains the syntax definition for the new function. For example, the existence of a file on disk called stat.m with:

```
function [mean,stdev] = stat(x)
% stat Interesting statistics.
n = length(x);
mean = sum(x)/n;
stdev = sqrt(sum((x-mean).^2)/n);
```

defines a new function called STAT that calculates the mean and standard deviation of a vector. The variables within the body of the function are all local variables. See SCRIPT for procedures that work globally on the workspace.

---

### - On rappelle que Matlab™ n'accepte pas d'indices négatifs ou nuls. Écrire une fonction qui, sous Matlab™ :

- 1/ calcule, sous forme d'une boucle portant sur  $k$ ,  $\hat{c}_{xy}^E[k, N]$  à partir d'un produit scalaire de vecteurs déduits de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ ,
- 2/ engendre un vecteur correspondant à l'axe des abscisses ( $k$ ),
- 3/ visualise l'estimée de  $c_{xy}^E(\tau)$  en fonction de  $\tau$ .

- Reprendre les mêmes questions pour la fonction d'intercorrélacion de puissance.

- Compte tenu des propriétés établies précédemment la corrélation peut encore être calculée en passant dans le domaine fréquentiel. Les deux fonctions correspondantes (co\_ene et co\_pui), écrites pour ce TP, sont données ci-dessus. Les commenter.

---

## Fonctions pour estimer la corrélation

### - **function [k,c]=co\_ene(x,y);**

```
% function [k,c]=co_ene(x,y);
% Cette fonction calcule l'intercorrélacion d'énergie des signaux x et y
% en passant dans le domaine fréquentiel.
% Entrée : x 1er signal à analyser
%          y 2ème signal à analyser
% Sortie : k vecteur des indices pour le calcul la corrélation
%          (k=-length(x)+1, ...,0,...,length(x)-1)
%          c corrélation calculée en k
x=x(:); y=y(:); N=length(x);
c=real(ifft(fft(x,2*N).*conj(fft(y,2*N))));
c1=c(N+2:2*N); c2=c(1:N); clear c
c=[c1; c2];
k=-(N-1):(N-1); k=k(:);
```

### - **function [k,c]co\_pui(x,y);**

```
% function [k,c]=co_pui(x,y);
% Cette fonction calcule l'intercorrélacion de puissance des signaux x et y
% en passant dans le domaine fréquentiel avec l'estimateur non biaisé.
% Entrée : x 1er signal à analyser
%          y 2e signal à analyser
% Sortie : k vecteur des indices pour le calcul la corrélation
%          (k=-length(x)+1, ...,0,...,length(x)-1)
%          c corrélation calculée en k
x=x(:); y=y(:); N=length(x);
t=1:N; t=t(:);
c=real(ifft(fft(x,2*N).*conj(fft(y,2*N))));
c1=c(N+2:2*N); c2=c(1:N); clear c
p1=t(1:N-1); p2=[N; p1(N-1:-1:1)];
c=[p1.\c1; p2.\c2];
k=-(N-1):(N-1); k=k(:);
```

On considère le signal rectangulaire

$$s(t) = \begin{cases} S_0 & \text{si } t \in [T_1, T_2[ \text{ avec } T_2 > T_1 > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

#### Préparation 5 :

- Calculer l'énergie de ce signal.
- Calculer sa fonction d'autocorrélation (théorique) d'énergie puis la représenter.
- Justifier pourquoi on calcule une fonction d'autocorrélation d'énergie et non de puissance.

Le signal  $s(t)$  est observé sur l'horizon  $]0, \Delta]$  avec  $\Delta > T_2$ . De plus, il est échantillonné sur  $N$  points à la fréquence  $F_e$ .

#### Manipulation 1 :

- Engendrer un vecteur correspondant à l'échantillonnage d'un tel signal avec  $S_0 = 2$ ,  $T_2 - T_1 = 1$  ms,  $F_e = 100$  kHz et, par exemple,  $N = 512$ .
- Calculer la fonction d'autocorrélation du signal  $s(t)$  à partir des  $N$  échantillons avec votre méthode puis à l'aide de la fonction `co_en`. Vérifier que les résultats sont *identiques* puis représenter l'estimée de  $c_{ss}^E(\tau)$  en fonction de  $\tau$ .
- Comparer les vitesses d'exécution des deux fonctions pour  $N$  grand qui est une puissance de 2 puis  $N$  de la forme  $2^p - 1$  ( $p$  entier). Conclure.

### III/ DÉTECTION ET FILTRAGE ADAPTÉ

Pour détecter la présence d'un objet dans l'atmosphère, un radar émet une onde électromagnétique de forme connue entre les instants 0 et  $T$ . Le signal émis est, par exemple, une impulsion rectangulaire de largeur  $T$  et d'énergie  $E_s$ . Si l'onde émise rencontre un objet (hypothèse  $H_1$ ), elle est réfléchiée et l'onde réfléchiée est reçue par une antenne en plus du bruit ambiant. Si l'onde ne rencontre aucun objet (hypothèse  $H_0$ ), seul le bruit ambiant est reçu par l'antenne. On note  $s(t)$  le signal émis, supposé déterministe, et  $b(t)$  le bruit au niveau de l'antenne, supposé blanc et de densité spectrale de puissance  $\Gamma_b$ . On néglige le temps de propagation du signal émis. Ainsi, selon l'hypothèse, le signal reçu  $x(t)$  est

$$\begin{cases} H_0 : x(t) = b(t), \\ H_1 : x(t) = s(t) + b(t). \end{cases}$$

Le filtre adapté (FA) maximise le rapport signal sur bruit (RSB) en sortie du filtre à l'instant  $t_0$  où l'on souhaite décider de la présence ou de l'absence de l'objet. Ainsi, uniquement à partir de l'analyse du signal de sortie du filtre adapté à l'instant  $t_0$ , on décide de la présence ou de l'absence de l'objet. L'objectif du filtre adapté n'est en aucun cas de restituer le signal utile.

On démontre (cf. cours) que la réponse impulsionnelle (RI) du filtre adapté est  $h(t) = s^*(t_0 - t)$ . Le filtre adapté est encore, comme il va l'être établi, un corrélateur. On note  $y(t)$  le signal en sortie du filtre. L'étude va être effectuée avec un signal émis rectangulaire.

#### Préparation 6 :

- Représenter le signal  $s(t)$  ainsi que la réponse impulsionnelle du filtre adapté pour  $t_0$  quelconque.
- Vérifier que le choix  $t_0 = T$  est la plus petite valeur de  $t_0$  conduisant à un filtre adapté causal. Pourquoi, pour un traitement en temps réel, ne retient-on pas en général une valeur de  $t_0$  plus grande ?
- Démontrer qu'en l'absence de bruit et sous l'hypothèse  $H_1$  le signal de sortie du filtre adapté est égal à  $c_{ss}^E(t - t_0)$ . La sortie du filtre adapté n'est donc pas le signal utile.
- Tracer l'allure du signal du filtre adapté sous chacune des hypothèses sans bruit, puis avec un bruit *faible* et ensuite un bruit *important*.
- Expliciter la puissance instantanée du signal utile en sortie du filtre à l'instant  $t_0$ .
- La formule des interférences (cf. cours) précise que la puissance du bruit en sortie du filtre adapté, notée  $P_b$ , est donnée par la relation  $P_b = \Gamma_b \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df$  où  $H(f)$  est la réponse en fréquence (RF) du filtre. Pour le signal émis rectangulaire étudié, expliciter  $P_b$  en fonction de  $\Gamma_b$  et  $E_s$ .
- Expliciter le rapport signal sur bruit en sortie du filtre adapté à l'instant de décision  $t_0$ .
- Prévoir l'influence de  $\Gamma_b$  sur la qualité de la détection.

La fonction `adapte(H,dsp)`; calcule le signal de sortie du filtre adapté avec  $t_0 = T = 1 \text{ ms}$ ,  $H$  définissant l'hypothèse ( $H = 0$  pour l'hypothèse  $H_0$ , et  $H = 1$  pour l'hypothèse  $H_1$ ) et  $dsp$  étant la densité spectrale de puissance du bruit ( $I_b$ ). L'évolution des signaux émis et reçu est représentée, de même que celle du signal de sortie du filtre. L'instant de décision  $t_0$ , qui est égal à  $T$ , est également reporté. La fonction permet également de récupérer les différents signaux (cf. l'aide sur la fonction).

### Manipulation 2 :

- Visualiser les différents signaux pour  $H = 1$  et  $dsp = 0$ .
- Étudier l'influence de la densité spectrale de puissance du bruit ( $I_b$ ) avec les deux hypothèses sur la valeur du signal de sortie à l'instant  $t_0$  :  $x(t_0)$  (à  $dsp$  donnée, il faut effectuer l'étude pour plusieurs réalisations ou encore trajectoires et les deux hypothèses).
- Discuter de l'intérêt du filtre adapté.
- Si, à partir de l'analyse du signal en sortie du filtre adapté à l'instant  $t_0$ , on décide que l'objet est présent alors qu'il ne l'est pas, on parle de fausse alarme. Si, par contre, on décide que l'objet est absent alors qu'il est présent, on parle d'erreur par non détection. Quelle est l'ordre de grandeur de la valeur maximale de la densité spectrale de puissance du bruit  $I_b$  conduisant à un taux d'erreur par fausse alarme ou non détection *faible* ?

## IV/ FILTRAGE D'UN BRUIT BLANC

On s'intéresse dans cette partie à un signal qui est échantillonné sur  $N$  points à la fréquence  $F_e = 100 \text{ kHz}$ , le signal échantillonné étant un bruit blanc de puissance unitaire. L'instruction `b = blanc(N)`; qui a été écrite pour ce TP permet de générer un tel signal échantillonné.

### Manipulation 3 :

- Générer un tel signal avec  $N = 1024$  puis visualiser le signal en fonction de  $t$  et le commenter.
- Estimer tout d'abord la fonction d'autocorrélation de puissance du signal échantillonné avec votre méthode puis à l'aide de la fonction `co_pui` qui a été écrite pour ce TP. Vérifier que les résultats sont *identiques* puis représenter l'évolution de la corrélation estimée en fonction de  $\tau$ .
- Comparer les vitesses d'exécution des deux fonctions pour  $N$  *grand* qui est une puissance de 2 puis  $N$  de la forme  $2^p - 1$  ( $p$  entier). Conclure.
- Comparer l'autocorrélation théorique et l'autocorrélation estimée à partir des 8192 échantillons.
- Étudier l'influence de  $N$ , c'est-à-dire de l'horizon d'observation.
- Conclure.

L'instruction `b = blanc_filtre(b, f_cn)`; (écrite pour ce TP) filtre le signal  $b$  avec un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure  $f_c$ ,  $f_{cn}$  étant la fréquence de coupure réduite par rapport à la fréquence de Shannon  $F_e/2$  :

$$f_{cn} = \frac{f_c}{F_e/2}.$$

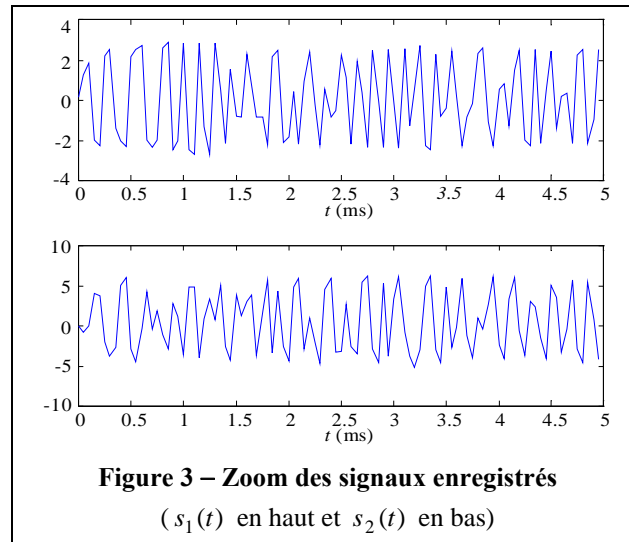
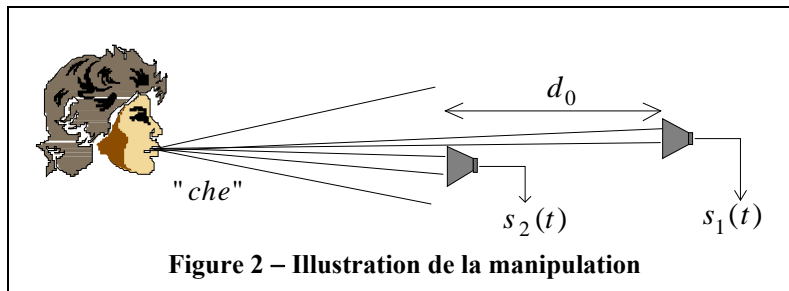
### Manipulation 4 :

- Filtrer le bruit blanc  $b$  à la fréquence  $f_c = 25 \text{ kHz}$ . Visualiser le signal filtré et le commenter.
- Estimer puis visualiser la fonction d'autocorrélation de puissance du signal filtré. Proposer une allure simplifiée de la fonction de corrélation de ce signal.
- Recommencer avec  $f_c = 10 \text{ kHz}$  puis  $f_c = 5 \text{ kHz}$ .
- Comparer les vitesses de variation des différents bruits filtrés avec la largeur de la bande passante du filtre qui a permis de les générer.
- Comparer les largeurs du lobe principal de la fonction de corrélation à  $1/f_c$ .
- Conclure.

## V/ MESURE DE LA VITESSE DU SON

Le but de cette partie est de déterminer la vitesse de propagation du son en mesurant le retard  $t_0$  entre les signaux  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$  reçus par deux microphones alignés avec la source. Le schéma du dispositif est représenté sur la figure 2. On suppose que la distance  $d_0$  est connue. Le retard pourrait être mesuré très facilement avec un signal émis très bref, par exemple un claquement. Cependant, afin de justifier l'utilisation de la fonction de corrélation, le signal émis est un « *che* » qui est un signal relativement *riche*. Un exemple de signal reçu par les microphones est représenté sur la figure 3. À partir de la visualisation des signaux reçus par les microphones, il est impossible d'estimer le retard.





Pour l'étude théorique, on considère que le son émis est un signal aléatoire stationnaire et ergodique de puissance finie (non nulle) et que les signaux sont échantillonnés à la fréquence  $F_e$ . L'estimateur de la fonction de corrélation est donc celui exprimé par les relations (10) à (12).

On rappelle que la vitesse de propagation d'une onde acoustique dépend surtout de la température :  $v = v_0 \sqrt{1 + T/273}$ , où  $T$  est la température (exprimée en degré Celsius) et  $v_0$  la vitesse à  $0^\circ\text{C}$ . On a  $v_0 = 331$  m/s, à  $20^\circ\text{C}$   $v = 343$  m/s et à  $25^\circ\text{C}$   $v = 346$  m/s.

#### Préparation 7 :

- Exprimer  $s_1(t)$  en fonction de  $s_2(\cdot)$ ,  $t_0$  et l'atténuation  $G_0$  due à la différence de chemin parcourue par les deux ondes.
- Pourquoi le signal émis est-il un « che » et non un sifflement ?
- Exprimer la fonction d'intercorrélation des signaux  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$ ,  $c_{s_1 s_2}^P(\tau)$ , en fonction de l'autocorrélation du signal  $s_2(t)$ ,  $c_{s_2 s_2}^P(\cdot)$ .
- En déduire que  $c_{s_1 s_2}^P(\tau)$  passe par un maximum en  $\tau = t_0$ .
- Exprimer la vitesse de propagation du son  $v_0$  en fonction de  $d_0$  et  $t_0$ .
- On suppose que les signaux sont de fréquences inférieures à  $F_e/2$  et on ne prend pas en compte le fait que l'horizon d'observation est fini. Indiquer la précision avec laquelle le maximum de  $c_{s_1 s_2}^P(\tau)$  est déterminé suite à l'échantillonnage des signaux. Évaluer cette précision pour  $F_e = 20$  kHz et en déduire la précision avec laquelle  $v_0$  est déterminé pour  $d_0 = 50$  cm.
- Pour un enregistrement donné effectué sur  $N$  points, les signaux étant enregistrés à la fréquence  $F_e$ , comment peut-on faire pour améliorer la qualité du tracé de la fonction d'autocorrélation et, par conséquent, la détermination de la position du maximum ?
- Lire les commandes de Matlab™ données ci-après.
- Écrire un programme qui, sous Matlab™, détermine les éléments nécessaires à l'estimation de la vitesse de propagation du son.

---

### Commandes de Matlab™

- **load** Load data from MAT-file into workspace  
load filename is the command form of the syntax.
  - **ginput** Graphical input from mouse  
[X,Y] = ginput(N) gets N points from the current axes and returns the X- and Y-coordinates in length N vectors X and Y. The cursor can be positioned using a mouse. Data points are entered by pressing a mouse button or any key on the keyboard except carriage return, which terminates the input before N points are entered.  
[X,Y] = ginput gathers an unlimited number of points until the return key is pressed.
- 

### Manipulation 5 :

- Faire une acquisition des signaux à partir de la maquette qui est à votre disposition ( $d_0 = 50 \text{ cm}$ ,  $F_e = 20 \text{ kHz}$ ) en émettant pendant *assez longtemps* un « che » afin de faciliter les acquisitions.
- Visualiser ces signaux sous Matlab™ en fonction du temps puis les traiter.
- Préciser la valeur de la vitesse de propagation du son trouvée.
- Facultatif : déterminer la vitesse avec une meilleure précision.
- Dresser une conclusion générale de l'ensemble du TP.



## TP 2/3 – IDENTIFICATION ET SYNTHÈSE DE VOYELLES

La première partie de ce TP concerne l'identification des paramètres d'un filtre linéaire (FL) en utilisant la fonction de corrélation (FC). Cette démarche est ensuite mise en œuvre pour synthétiser des voyelles.

On rappelle que les axes des courbes et les unités doivent être précisés. Les représentations temporelles seront effectuées en fonction du temps exprimé en s ou ms et les représentations fréquentielles en fonction des fréquences exprimées en Hz ou kHz.

### I/ IDENTIFICATION

Le but de cette partie est d'identifier, par corrélation, les paramètres  $a_i$  ( $i = 1, \dots, d$ ) de la fonction de transfert (FT)

$$H(z) = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^d a_i z^{-i}} \quad (1)$$

d'un filtre dynamique récursif (mono-entrée et mono-sortie) tout pôle à temps discret. La relation entrée-sortie ( $e-s$ ) de ce filtre récursif s'écrit sous la forme récurrente

$$s_n = e_n + \sum_{i=1}^d a_i s_{n-i}, \quad (2)$$

ou encore sous la forme

$$s_n = e_n + \sum_{i=1}^{+\infty} b_i e_{n-i}, \quad (3)$$

les coefficients  $b_i$  s'exprimant en fonction des coefficients  $a_i$ .

Pour identifier les paramètres du modèle, on suppose que le signal d'entrée est un bruit blanc, signal aléatoire stationnaire et ergodique (SASE), de puissance  $P_e$ , c'est-à-dire que

$$E[e_n e_{n-k}^*] = \gamma_{ee}[k] = c_{ee}^P[k] = P_e \delta_k, \quad (4)$$

où  $\delta_k$  est le symbole de Kronecker (cf. notations définies dans le TP 1). Le signal d'entrée du filtre linéaire étant stationnaire et ergodique, le signal de sortie l'est aussi. La fonction de corrélation statistique est alors égale à la fonction de corrélation de puissance. Le signal d'entrée étant un bruit blanc et le filtre récursif, le signal de sortie est dit autorégressif (AR).

#### Préparation 1 :

- Qu'appelle-t-on pôles *dominants* d'un filtre linéaire stable (analogique ou numérique) ?
- Exprimer les vecteurs **Num** et **Den** sous forme de ligne correspondant respectivement aux coefficients des polynômes du numérateur et du dénominateur de  $H(z)$ , le  $i^{\text{e}}$  élément de ces vecteurs étant égal au coefficient de  $z^{-(i-1)}$  (les polynômes sont ainsi ordonnés suivant les puissances croissantes de  $z^{-1}$ ). Ces vecteurs seront utilisés par les fonctions de Matlab™.
- Multiplier la relation (3) par  $e_{n+k}^*$  puis prendre l'espérance mathématique de la relation ainsi obtenue. Établir que  $\forall k > 0$   $c_{es}^P[k] = 0$  et que  $c_{es}^P[0] = P_e$ .
- Multiplier la relation (2) par  $s_{n-k}^*$  avec  $k > 0$ . Établir que  $c_{ss}^P[k]$  vérifie la relation de récurrence

$$\forall k > 0 \quad c_{ss}^P[k] = \sum_{i=1}^d a_i c_{ss}^P[k-i]. \quad (5)$$

– Par un raisonnement similaire, en déduire l'expression de la puissance du bruit d'entrée  $P_e$  en fonction de  $c_{ss}^P[k]$  et des coefficients  $a_i$  ( $i = 1, \dots, d$ ).

– On pose  $\mathbf{a} = (a_1 \dots a_d)^T$  et  $\mathbf{c} = (c_{ss}^P[1] \dots c_{ss}^P[d])^T$ . Mettre les relations (5) obtenues pour  $k \in [1, d]$  sous la forme matricielle suivante :  $\mathbf{c} = \mathbf{M} \mathbf{a}$ .

– Exprimer les coefficients de la matrice  $\mathbf{M}$  et vérifier que c'est une matrice de Toeplitz. Quelle propriété supplémentaire a-t-elle dans le cas de signaux réels ?

– En déduire que la connaissance de  $c_{ss}^P[k]$  ( $k = 0, \dots, d$ ) permet d'identifier les paramètres du filtre ainsi que la puissance du signal d'entrée.

– Lire les commandes de Matlab™ permettant d'enregistrer et d'écouter un son.



## Enregistrement et écoute d'un signal sous Matlab™

```
% paramètres de l'enregistrement d'un son et de son écoute
Fe=22050; % fréquence d'échantillonnage
n_bits=16; % nombre de bits
n_channels=1; % nombre de canaux
d=2; % durée d'enregistrement

% création d'une variable objet associée à l'enregistrement sonore
x=audiorecorder(Fe,n_bits,n_channels);

% enregistrement d'un son pendant d secondes
recordblocking(x,d);

% écoute du son enregistré
play(x);

% conversion de l'objet x en un vecteur de valeurs
s=getaudiodata(x);

% création d'une variable objet associée à un vecteur d'échantillons s
y=audioplayer(s,Fe);

% écoute du son y
play(y);
```

Dans le cas purement théorique où l'on connaît la fonction de corrélation, il suffit de résoudre le système d'équations linéaires (5), dites de Yule-Walker, pour en déduire les coefficients du filtre. Mais, dans la pratique, la fonction de corrélation n'est pas connue, et l'approche consiste à estimer la fonction de corrélation à partir des échantillons du signal disponibles, puis à reporter ces valeurs estimées dans les équations de Yule-Walker et enfin à résoudre ces dernières. Il faut évidemment choisir un estimateur de la fonction de corrélation. Si un estimateur non biaisé est retenu (cf. TP n°1), la matrice de corrélation ainsi obtenue n'est pas garantie définie positive et, si le signal traité est *mal choisi*, le filtre identifié peut être instable. On retient un estimateur biaisé de la fonction de corrélation garantissant la stabilité du filtre. L'autocorrélation  $\hat{c}_{xx}^P[k]$  d'un signal  $x_n$  observé sur  $N$  points ( $n = 1, \dots, N$ ) est alors estimée par

$$\hat{c}_{xx}^P[k, N] = \frac{1}{N} \sum_{n=k+1}^N x_n x_{n-k}^* \quad \text{si } 0 \leq k < N. \quad (6)$$

Un exemple de signal correspondant à l'enregistrement de la voyelle « a » est représenté sur la figure 1. On cherche à identifier les paramètres d'un filtre qui engendre un tel signal lorsqu'il est excité par une entrée qui assimilé à un bruit blanc (4). La méthode d'identification présentée précédemment est mise en œuvre.

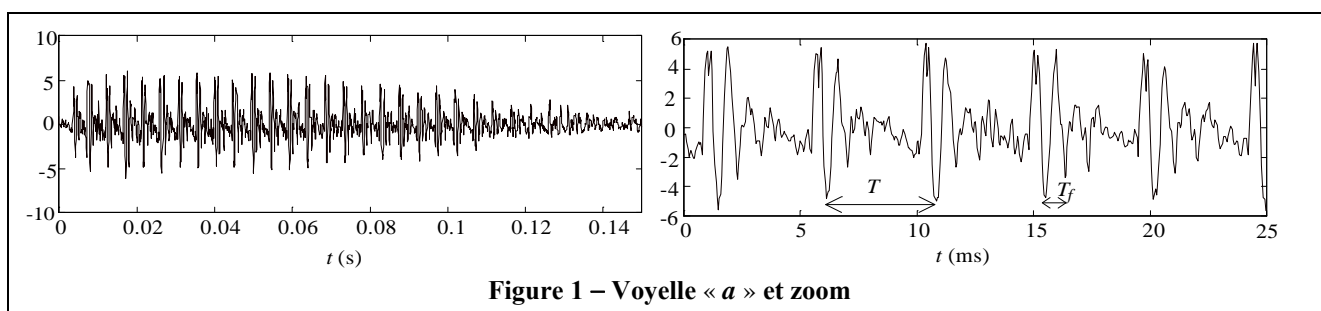


Figure 1 – Voyelle « a » et zoom

### Manipulation 1 :

- Enregistrer une voyelle (par exemple un « e » ou un « o ») à la fréquence d'échantillonnage  $F_e$  égale à 22,05 kHz.
- Visualiser ce signal puis isoler uniquement la partie du signal correspondant à la voyelle. Soit  $s$  cette partie utile du signal qui doit être enregistrée dans un fichier.
- La fonction  $[\mathbf{Den}, P_e] = \text{iden}(s, d)$ ; (écrite pour ce TP) retourne le polynôme correspondant au dénominateur de  $H(z)$  ainsi que la puissance  $P_e$ ,  $\mathbf{a}$  et  $P_e$  étant calculés avec la méthode présentée précédemment à partir du signal  $s$  et un modèle AR d'ordre  $d$ . (Utiliser impérativement cette fonction afin de pouvoir aborder l'ensemble du sujet en 4 h.) Déterminer le vecteur  $\mathbf{Den}$  pour votre voyelle avec, par exemple,  $d = 20$ .

### Préparation 2 :

- Lire la syntaxe des commandes de Matlab™ données ci-dessous.
- Prévoir un programme qui, sous Matlab™, à partir du vecteur  $\mathbf{Den}$  :

- 1/ calcule les pôles  $p_i$  ( $i = 1, \dots, d$ ) du filtre puis les visualise dans le plan complexe,
- 2/ détermine le module et la phase des pôles,
- 3/ détermine la valeur des fréquences  $f_i = \arg(p_i)F_e/(2\pi)$  ( $i = 1, \dots, d$ ),
- 4/ détermine puis visualise la réponse impulsionnelle (RI) du filtre ainsi que sa réponse en fréquence (RF).

### Commandes de Matlab™

- **abs** Absolute value  
abs(X) is the absolute value of the elements of X. When X is complex, abs(X) is the complex modulus (magnitude) of the elements of X.
- **angle** Phase angle  
angle(H) returns the phase angles, in radians, of a matrix with complex elements.
- **freqz** Frequency response of digital filter  
[H,W] = freqz(B,A,N) returns the N-point complex frequency response vector H and the N-point frequency vector W in radians/sample of the filter:  

$$H(e^{j\omega}) = \frac{B(e^{j\omega})}{A(e^{j\omega})} = \frac{b(1)+b(2)e^{-j\omega}+\dots+b(m+1)e^{-jm\omega}}{a(1)+a(2)e^{-j\omega}+\dots+a(n+1)e^{-jn\omega}}$$
given numerator and denominator coefficients in vectors B and A. The frequency response is evaluated at N points equally spaced around the upper half of the unit circle. If N isn't specified, it defaults to 512.  
[H,W] = freqz(...,N,'whole') uses N points around the whole unit circle.  
H = freqz(...,W) returns the frequency response at frequencies designated in vector W, in radians/sample (normally between 0 and pi). W must be a vector with at least two elements.  
[H,F] = freqz(...,N,Fs) and [H,F] = freqz(...,N,'whole',Fs) return frequency vector F (in Hz), where Fs is the sampling frequency (in Hz).  
H = freqz(...,F,Fs) returns the complex frequency response at the frequencies designated in vector F (in Hz), where Fs is the sampling frequency (in Hz).  
freqz(...) with no output arguments plots the magnitude and unwrapped phase of the filter in the current figure window.
- **impz** Impulse response of digital filter  
[H,T] = impz(B,A) computes the impulse response of the filter:  

$$H(e^{j\omega}) = \frac{B(e^{j\omega})}{A(e^{j\omega})} = \frac{b(1)+b(2)e^{-j\omega}+\dots+b(m+1)e^{-jm\omega}}{a(1)+a(2)e^{-j\omega}+\dots+a(n+1)e^{-jn\omega}}$$
given numerator and denominator coefficients in vectors B and A. The number of samples is chosen internally, and impz returns the response in column vector H and a vector of times (or sample intervals) in T (T = [0 1 2 ...]).  
[H,T] = impz(...,N) computes N samples of the impulse response. If N is a vector of integers, the impulse response is computed only at those integer values (0 is the origin).  
[H,T] = impz(...,N,Fs) computes N samples and scales T so that samples are spaced 1/Fs units apart. Fs is 1 by default.  
[H,T] = impz(...,[],Fs) chooses the number of samples for you and scales T so that samples are spaced 1/Fs units apart.  
impz(...) with no output arguments plots the impulse response using stem(T,H) in the current figure window.
- **roots** Find polynomial roots  
roots(C) computes the roots of the polynomial whose coefficients are the elements of the vector C. If C has N+1 components, the polynomial is  $C(1)*X^N + \dots + C(N)*X + C(N+1)$ .
- **zplane** Z-plane zero-pole plot  
zplane(Z,P) plots the zeros Z and poles P (in column vectors) with the unit circle for reference. Each zero is represented with a 'o' and each pole with a 'x' on the plot. Multiple zeros and poles are indicated by the multiplicity number shown to the upper right of the zero or pole.  
zplane(B,A) where B and A are row vectors containing transfer function polynomial coefficients plots the poles and zeros of  $B(z)/A(z)$ . Note that if B and A are both scalars they will be interpreted as Z and P.



### Manipulation 2 :

- Déterminer les pôles du filtre et vérifier que leur module est inférieur à un.
- Reporter les pôles dans le plan complexe.
- Mettre en évidence les pôles dominants et reporter à coté de chacun de ces pôles  $p_i$  la valeur de leur module ainsi que celle de la fréquence associée  $F_i = \arg(p_i)F_e/(2\pi)$ .
- Calculer puis visualiser la réponse impulsionnelle du filtre ainsi que sa réponse en fréquence.
- Relier l'allure de la réponse en fréquence et de la réponse impulsionnelle aux pôles dominants.

## II/ ANALYSE D'UNE VOYELLE

En première approximation, on peut considérer que le signal correspondant à l'enregistrement d'une voyelle est un motif élémentaire qui est répété  $K$  fois (cf. Figure 1). La période de répétition  $T$  dépend du timbre du locuteur et vaut environ 10 ms pour un homme et 5 ms pour une femme. La fréquence  $1/T$  correspond au fondamental de la voix. On peut également distinguer quelques pseudo-périodes (par exemple,  $T_f$  sur la figure 1).

### Préparation 3 :

- Justifier pourquoi on peut considérer que la transformée de Fourier d'une voyelle est constituée de raies.
- À quelle fréquence se trouvent ces raies ?
- Lire la syntaxe de la commande `fft` de Matlab™ donnée ci-dessous.
- Prévoir un programme qui, sous Matlab™ :
  - 1/ calcule sur  $M$  points la transformée de Fourier d'un signal enregistré sur  $N$  points à la fréquence  $F_e$ , avec  $M \geq N$ ,
  - 2/ engendre un vecteur correspondant à l'axe des fréquences **physiques** (en Hz),
  - 3/ visualise le module de cette transformée de Fourier.

---

### Commandes de Matlab™

- **fft** Discrete Fourier transform  
`fft(X)` is the discrete Fourier transform (DFT) of vector  $X$ . For matrices, the `fft` operation is applied to each column.  
`fft(X,N)` is the  $N$ -point `fft`, padded with zeros if  $X$  has less than  $N$  points and truncated if it has more.  
For length  $N$  input vector  $x$ , the DFT is a length  $N$  vector  $X$ , with elements  $N$   
$$X(k) = \sum_{n=1}^N x(n) \exp(-j2\pi(n-1)(k-1)/N), k=1, \dots, N.$$
The inverse DFT (computed by `ifft`) is given by  
$$x(n) = \sum_{k=1}^N X(k) \exp(-j2\pi(n-1)(k-1)/N), n=1, \dots, N.$$

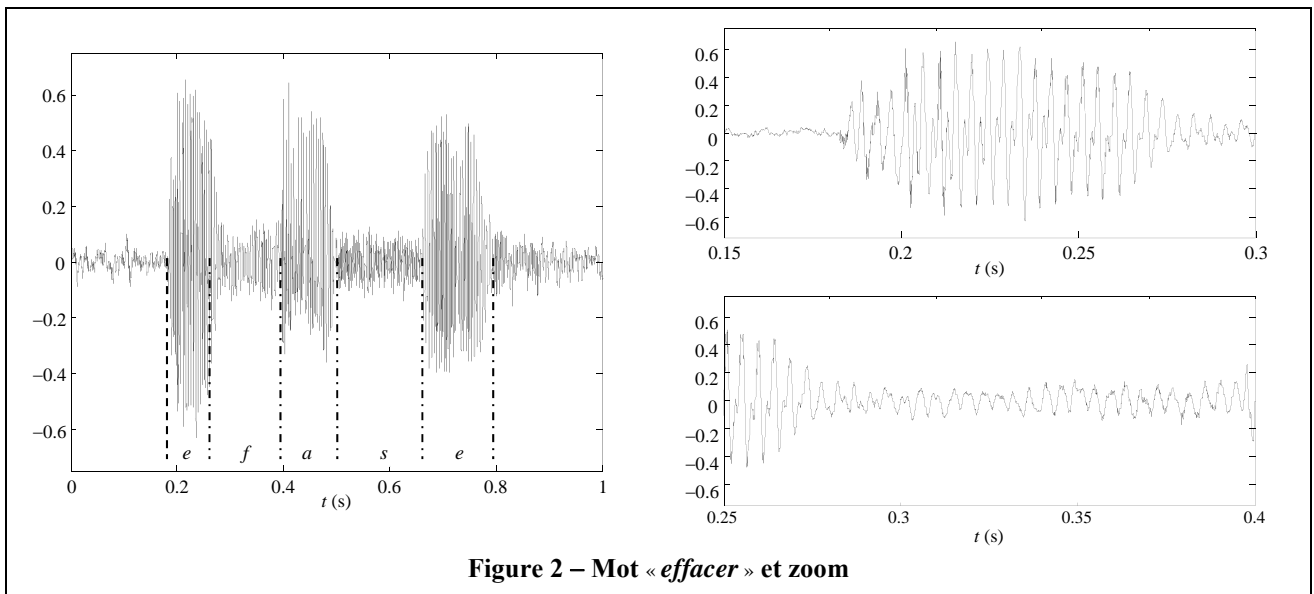
---

### Manipulation 3 :

- Observer la voyelle enregistrée et retrouver les caractéristiques énoncées précédemment (motif élémentaire qui est répété  $K$  fois, période de répétition  $T$  d'environ 10 ms pour un homme et 5 ms pour une femme).
- Déterminer la valeur de  $T$  ainsi que la durée totale ( $KT$ ) de la voyelle. En déduire le nombre de motifs élémentaires,  $K$ , dans la voyelle.
- Déterminer les principales pseudo-périodes intervenant dans la voyelle.
- Visualiser la transformée de Fourier de la voyelle enregistrée. Vérifier que l'on peut considérer qu'elle est constituée de raies à des fréquences multiples de  $1/T$ .
- Relever les fréquences pour lesquelles la transformée de Fourier présente des maximums significatifs, ces fréquences s'appellent formants et on en distingue 3 à 5. Relier les formants aux pseudo-périodes trouvées précédemment.

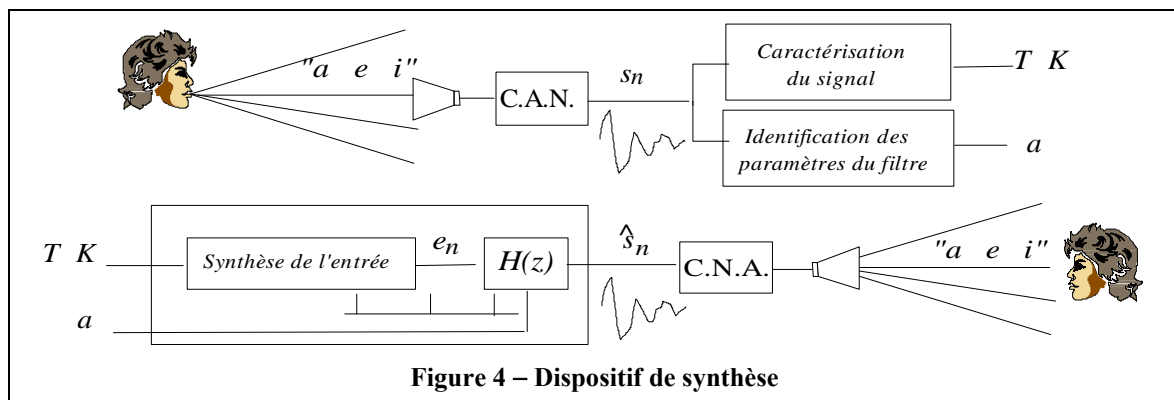
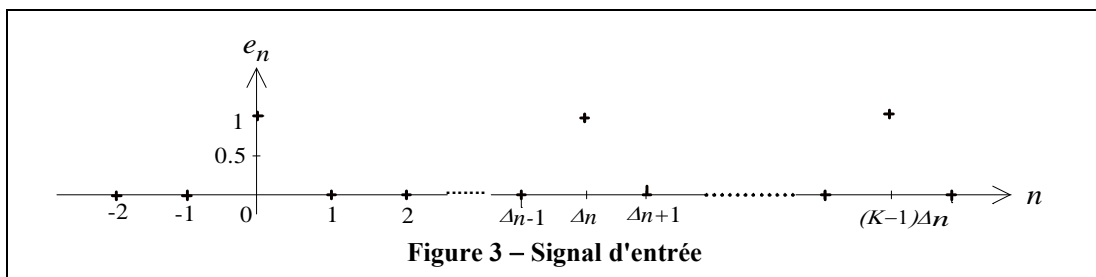
À titre d'information, l'enregistrement du mot « effacer » est représenté sur la figure 2. On y constate une alternance de zones assez périodiques, dites zones voisées, et de zones qui font penser à du bruit, dites zones non voisées. Les sons voisés font vibrer les cordes vocales et ont une structure harmonique, contrairement aux sons non voisés.





### III/ SYNTHÈSE DE VOYELLES

Compte tenu des propriétés des voyelles, pour les synthétiser le filtre identifié dans la partie I est excité par un signal  $e_n$  qui est bruit pseudo-blanc périodique :  $e_n$  est une succession de  $K$  impulsions espacées de  $\Delta n = T F_e$  (Figure 3). Le signal de sortie ainsi synthétisé est ensuite appliqué à l'entrée d'un convertisseur numérique – analogique, le signal de sortie du convertisseur étant l'entrée d'un haut-parleur (Figure 4). Ceci doit permettre de synthétiser un son *proche* de la voyelle enregistrée.



#### Préparation 4 :

- Exprimer la puissance du bruit du signal représenté sur la figure 3.
- En déduire le coefficient multiplicatif à appliquer à ce signal pour que sa puissance soit égale à  $P_e$ .
- Lire la syntaxe de la commande de Matlab™ donnée ci-dessous.
- Connaissant  $K$  et  $T$ , prévoir un programme qui, sous Matlab™, engendre le signal d'excitation du filtre AR (sans faire de boucle) puis, connaissant en plus les paramètres du filtre, calcule sa sortie, c'est-à-dire la voyelle synthétisée.

---

### Commande de Matlab™

- **filter** One-dimensional digital filter  
Y = filter(B,A,X) filters the data in vector X with the filter described by vectors A and B to create the filtered data Y. The filter is a "Direct Form II Transposed" implementation of the standard difference equation:  
$$a(1)*y(n) = b(1)*x(n) + b(2)*x(n-1) + \dots + b(nb+1)*x(n-nb) - a(2)*y(n-1) - \dots - a(na+1)*y(n-na)$$
  
If a(1) is not equal to 1, filter normalizes the filter coefficients by a(1).
- 

#### Manipulation 4 :

- Comparer la voyelle synthétisée à la voyelle enregistrée dans le domaine temporel puis le domaine fréquentiel.
- Écouter la voyelle synthétisée.
- Dresser un conclusion générale.

Ce qui vient d'être vu peut être utilisé pour reconnaître des voyelles.

#### Manipulation 5 (facultatif) :

- Enregistrer les différentes voyelles prononcées par une même personne.
- Enregistrer ensuite une voyelle quelconque et mettre en œuvre une méthode de reconnaissance des voyelles.





## TP 3/3 – TRAITEMENT D'ANTENNE : LOCALISATION DE SOURCES

**Avertissement :** L'énoncé de ce TP est plus long que celui des précédents TP. Il est très important d'avoir très bien préparé ce TP avant la séance et ce, afin de se concentrer pendant la séance à l'interprétation des résultats et la comparaison des différentes méthodes. Certains programmes sont donnés ; les autres doivent être écrits avant d'arriver en séance de TP. Il est rappelé que la préparation du TP comprend aussi la lecture de la partie manipulation (cf. avertissement général donné en début d'énoncé des TP).

Différentes méthodes de traitement du signal qui estiment, à l'aide des signaux reçus par une antenne, la direction d'émission de sources, émettant des signaux quasi-monochromatiques plus ou moins corrélés, sont étudiées et comparées au cours de ce TP. La première méthode relève plus de l'électronique que du traitement du signal. Elle consiste à faire effectuer à l'antenne un balayage électronique. Ensuite, des techniques possédant une meilleure résolution sont étudiées : tout d'abord la méthode MUSIC (MUltiple Signal Classification), qui est basée sur l'étude de la matrice de covariance des signaux reçus, puis la méthode du maximum de vraisemblance, qui exploite l'expression de la densité de probabilité des signaux reçus. Ces méthodes conduisent à résoudre un problème d'optimisation : recherche de la position du maximum ou du minimum d'une fonction. Il existe des algorithmes pour effectuer une telle recherche mais ils ne sont pas mis en œuvre pendant cette séance de TP. Une visualisation des fonctions dont on recherche la position de l'extrémum sera effectuée ; la position de l'extrémum sera ensuite déterminée graphiquement.

L'étude sera menée à la fois avec des signaux sonores reçus par une antenne acoustique (sifflement ou signaux émis par des haut-parleurs) et des signaux simulés qui permettront de mettre au point les programmes, d'étudier et de comparer, dans des conditions parfaitement contrôlées, les performances des algorithmes et d'analyser l'influence de différents paramètres. Avant de s'intéresser aux différentes méthodes de traitement d'antenne, les notations vont être précisées et un modèle des signaux établi.

### I/ NOTATIONS ET MODÉLISATION DES SIGNAUX

Il s'agit de déterminer la direction d'émission de  $M$  sources à partir des signaux reçus par une antenne linéaire constituée de  $N$  ( $> M$ ) capteurs équidistants (Figure 1). L'indice  $m$  ( $m=1, \dots, M$ ) est réservé pour les sources, ou encore émetteurs, et l'indice  $n$  ( $n=1, \dots, N$ ) pour les capteurs, ou encore récepteurs de l'antenne. On note  $d_0$  la distance entre deux capteurs consécutifs,  $\theta_m$  ( $m=1, \dots, M$ ) la direction d'émission de la source numéro  $m$  et  $\hat{\theta}_m$  la valeur estimée de l'angle  $\theta_m$ .

On suppose que le signal émis par les différentes sources est quasi-monochromatique autour de la fréquence  $f_0$  et, de plus, que l'onde est plane, ce qui revient à considérer que les sources sont situées à l'infini. On note  $s(t)$  le signal reçu par le capteur n° 1 ( $n=1$ ) qui sert de référence.

Les signaux reçus par l'antenne sont échantillonnés sur  $K$  points à la fréquence  $F_e = 1/T_e$  et stockés dans la matrice  $\mathbf{S}$  qui est de dimension  $(N \times K)$ . La  $n^{\text{ième}}$  ligne de la matrice correspond au signal reçu par le  $n^{\text{ième}}$  récepteur et la  $k^{\text{ième}}$  colonne aux signaux reçus par les différents capteurs à l'instant d'acquisition  $t_k = kT_e$  ( $k=1, \dots, K$ ).

Pour les acquisitions et les signaux simulés, on a  $N = 4$ ,  $M = 1$  ou  $2$ ,  $d_0 = 3$  cm,  $F_e = 20$  kHz et  $K = 2048$ . Les signaux simulés et émis par les haut-parleurs sont autour de la fréquence  $f_0 = 4$  kHz.

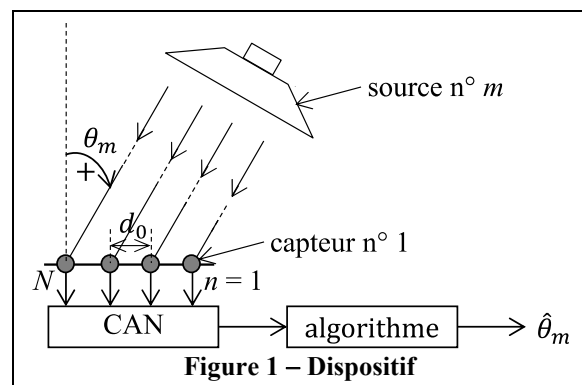


Figure 1 – Dispositif

#### I.1/ SIGNAL QUASI-MONOCROMATIQUE

Un **signal quasi-monochromatique**  $s(t)$  est un signal dont le spectre est à bande étroite, c'est-à-dire qu'il est nul en dehors des bandes fréquentielles  $[f_0 - \Delta f, f_0 + \Delta f]$  et  $[-f_0 - \Delta f, -f_0 + \Delta f]$ , avec  $0 < \Delta f \ll f_0$ . Les signaux quasi-monochromatiques sont extrêmement importants, plus particulièrement dans les systèmes de communication.

Un signal quasi-monochromatique réel autour de la fréquence  $f_0$  se met sous la forme

$$s(t) = a(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t)), \quad (1)$$

où  $a(t)$  est l'**amplitude instantanée** du signal  $s(t)$  et  $2\pi f_0 t + \varphi(t)$  sa **phase instantanée**. Les signaux  $a(t)$  et  $\varphi(t)$  sont des signaux *basses* fréquences (par rapport à  $f_0$ ). La valeur moyenne d'un signal quasi-monochromatique est

nulle. Si le signal  $s(t)$  est aléatoire, il en est de même pour  $a(t)$  et  $\varphi(t)$ . Dans toute la suite, on suppose que les différents signaux sont aléatoires, stationnaires et ergodiques (SASE).

Au signal quasi-monochromatique réel  $s(t)$ , on associe le **signal en quadrature**

$$s_q(t) = a(t) \sin(2\pi f_0 t + \varphi(t)), \quad (2)$$

ainsi que le **signal analytique**

$$s_a(t) = a(t) \exp(j(2\pi f_0 t + \varphi(t))). \quad (3)$$

Ces signaux sont obtenus par filtrage linéaire du signal  $s(t)$ . Le signal  $s_q(t)$  est obtenue par transformée de Hilbert du signal  $s(t)$ . La réponse en fréquence du filtre qui permet de passer du signal  $s(t)$  à son signal analytique  $s_a(t)$  est  $G_a(f) = 2u(f)$ ,  $u(f)$  étant l'échelon d'Heaviside. La puissance du signal analytique  $s_a(t)$  est donc le double de celle du signal  $s(t)$ .

Le signal

$$e(t) = a(t) \exp(j\varphi(t)) \quad (4)$$

est appelée **enveloppe (amplitude) complexe** du signal quasi-monochromatique  $s(t)$ . C'est un signal *basses* fréquences. La puissance de l'enveloppe complexe  $e(t)$  est égale à celle du signal analytique.

Les signaux considérés dans ce TP étant quasi-monochromatiques autour de la fréquence  $f_0$  qui est connue, l'enveloppe complexe contient toute l'information sur les signaux considérés. Plutôt que de traiter les signaux reçus, on va s'intéresser, de manière équivalente, à leur enveloppe complexe. L'enveloppe complexe des signaux échantillonnés arrivant sur les différents capteurs et stockés dans la matrice  $\mathbf{S}$  est notée  $\mathbf{E}$ . Ces deux matrices sont de même dimension.

La notion de signal analytique est plus générale et elle s'adresse à tout signal réel. En effet, à tout signal réel  $s(t)$  on peut associer par filtrage linéaire, de réponse en fréquence  $G_a(f) = 2u(f)$ , le signal  $s_a(t)$  qui est appelé signal analytique. Lors de ce filtrage, il n'y a pas de perte d'information car, le signal  $s(t)$  étant réel, sa transformée de Fourier  $S(f)$  vérifie  $S(-f) = S^*(f)$ ; ainsi la connaissance de  $S(f)$  pour  $f \geq 0$  est suffisante pour reconstruire  $s(t)$ , et les fréquences négatives n'apportent pas d'information supplémentaire par rapport aux fréquences positives. Plus d'informations sur les signaux quasi-monochromatiques peuvent être trouvées dans, par exemple, le livre de Maurice Charbit : "Éléments de Théorie du Signal : les Signaux Aléatoires", Ellipses.

Afin d'éliminer en partie le bruit, les signaux reçus par les capteurs sont filtrés numériquement dans le but de ne garder que la partie *utile* du spectre : on effectue un filtrage passe-bande idéal centré sur les fréquences  $\pm f_0$  et de largeur  $2\Delta f$  avant de déterminer l'enveloppe complexe du signal. La fonction  $[f_0, \mathbf{S}_{\text{filtre}}] = \text{trait}(\mathbf{S}, F_e)$  détermine la fréquence centrale  $f_0$  des signaux reçus par l'antenne et stockés dans la matrice  $\mathbf{S}$  puis les filtre ;  $\mathbf{S}_{\text{filtre}}$  est le signal filtré. La fonction  $\mathbf{E} = \text{env}(\mathbf{S}_{\text{filtre}}, f_0, F_e)$  détermine l'enveloppe complexe  $\mathbf{E}$  du signal. Ces deux fonctions doivent être impérativement utilisées pour pouvoir mener à bien l'ensemble du TP.

**Manipulation 1** : Un exemple de signal quasi-monochromatique bruité est enregistré dans le vecteur  $s$  (chargé avec l'instruction `load s`).

- En utilisant les fonctions données, filtrer ce signal puis déterminer son enveloppe complexe.
- Visualiser ces signaux et les commenter.

## I.2/ ONDE PLANE

L'hypothèse onde plane se traduit par le fait que le signal émis dans une direction  $\theta$  et arrivant sur deux capteurs distants de  $d_0$  est décalé de  $\tau = d_0 \sin(\theta)/v$ , où  $v$  est la vitesse de propagation de l'onde (Figure 1). Le signal reçu par le capteur  $n$  est alors égal à  $s(t - (n-1)\tau)$  où  $s(t)$  est le signal reçu par le capteur de référence ( $(n=1)$ ) et avec la numérotation des capteurs indiquée sur la figure 1 et l'orientation des angles retenue. On rappelle qu'à 20°C on a  $v \approx 343$  m/s et à 25°C  $v \approx 346$  m/s.

## I.3/ ONDE PLANE ET SIGNAL QUASI-MONOCHROMATIQUE

### I.3.1/ Cas d'une seule source

Le signal émis par une source émettant dans la direction  $\theta$  étant quasi-monochromatique et l'onde plane, l'enveloppe complexe du signal reçu par le capteur  $n$  et provenant de cette source est

$$a(t - (n-1)\tau) \exp(j\varphi(t - (n-1)\tau)) \exp(-j2\pi f_0 (n-1)\tau). \quad (5)$$

Le signal étant à bande étroite et l'antenne de dimension réduite, on peut considérer que les variations de l'enveloppe complexe sont négligeables, soit encore que  $a(t - (n-1)\tau) \approx a(t)$  et  $\varphi(t - (n-1)\tau) \approx \varphi(t)$ . En première

approximation, on peut alors considérer que l'enveloppe complexe du signal reçu par le capteur  $n$  est

$$a(t) \exp(j\varphi(t)) \exp(-j2\pi(n-1)f_0 d_0 \sin(\theta)/v) = e(t) \exp(-j2\pi(n-1)f_0 d_0 \sin(\theta)/v), \quad (6)$$

$e(t)$  étant l'enveloppe complexe du signal arrivant sur le capteur de référence ( $n=1$ ).

On note  $\mathbf{e}(t)$  le vecteur des différentes enveloppes complexes des signaux reçus par les différents capteurs à l'instant  $t$  et correspondant à la source émettant dans la direction  $\theta$ . Avec les hypothèses précédentes, on a

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{g}(\theta)e(t), \quad (7)$$

avec

$$\mathbf{g}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & w(\theta) & \dots & w^{N-1}(\theta) \end{bmatrix}^T \quad (8)$$

et

$$w(\theta) = \exp(-j2\pi f_0 d_0 \sin(\theta)/v). \quad (9)$$

Le vecteur  $\mathbf{g}(\theta)$  est appelé **steering vecteur** et il caractérise la source qui émet dans la direction  $\theta$ . Pour déterminer l'angle  $\theta$  sans ambiguïté, la condition  $-\pi < 2\pi d_0/\lambda_0 < \pi$ , ou encore  $d_0 < \lambda_0/2$  et appelée condition d'échantillonnage spatial, doit être satisfaite,  $\lambda_0$  étant la longueur d'onde du signal.

### 1.3.2/ Cas de plusieurs sources

Si plusieurs sources ( $M$ ) émettent dans des directions différentes  $\theta_m$  ( $m=1, \dots, M$ ), l'enveloppe complexe des signaux reçus est la somme des enveloppes complexes correspondant aux différentes sources. Le vecteur des enveloppes complexes des signaux reçus par l'antenne à l'instant  $t$  se met alors sous la forme

$$\mathbf{e}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ w(\theta_1) & w(\theta_2) & \dots & w(\theta_M) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ w(\theta_1)^{N-1} & w(\theta_2)^{N-1} & \dots & w(\theta_M)^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \\ e_M(t) \end{bmatrix} = \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{e}_r(t), \quad (10)$$

où  $\mathbf{e}_r(t)$  est le vecteur obtenu par concaténation des enveloppes complexes  $e_m(t)$  ( $m=1, \dots, M$ ) des signaux émis par les  $M$  sources et reçus par le capteur  $n=1$  servant de référence :

$$\mathbf{e}_r(t) = (e_1(t) \ e_2(t) \ \dots \ e_M(t))^T, \quad (11)$$

$\boldsymbol{\theta}$  est le vecteur des directions d'émission des sources :

$$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_M)^T, \quad (12)$$

et  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})$  la matrice des steering vecteurs obtenue par concaténation des vecteurs  $\mathbf{g}(\theta_m)$  ( $m=1, \dots, M$ ) :

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{g}(\theta_1) \ \mathbf{g}(\theta_2) \ \dots \ \mathbf{g}(\theta_M)). \quad (13)$$

Cette matrice contient le vecteur des paramètres à estimer et dépend de la géométrie de l'antenne. Les hypothèses, sources lointaines et variations de l'enveloppe complexe négligeables, permettent de séparer les dépendances en  $\boldsymbol{\theta}$  et  $t$ . On note  $\mathbf{E}_r$  la matrice obtenue par concaténation des différents vecteurs  $\mathbf{e}_r(t)$  aux instants d'acquisition  $t_k$  ( $k=1, \dots, K$ ).

#### Préparation 1 :

- Représenter un exemple de spectre des signaux  $s(t)$ ,  $s_a(t)$ ,  $s_q(t)$  et  $e(t)$ .
- La fréquence d'échantillonnage des signaux étant de 20 kHz, avec quelle précision peut-on mesurer des décalages temporels à partir d'une mesure directe du retard entre les signaux ou par analyse de leur corrélation ?
- Pour  $d_0 = 3$  cm et  $\theta = 30^\circ$ , quel est le décalage temporel entre les signaux arrivant sur deux capteurs consécutifs ?
- Pourquoi n'utilise-t-on pas des méthodes classiques de mesure de retard : mesure directe du retard entre les signaux ou mesure par analyse de leur corrélation ?

## II/ BALAYAGE ÉLECTRONIQUE

### II.1/ BALAYAGE MÉCANIQUE

On considère le signal  $s_\Sigma(t)$  qui est la somme des signaux arrivant sur les différents capteurs. Le principe du balayage mécanique consiste à faire tourner l'antenne et à déterminer la direction angulaire pour laquelle la puissance du signal  $s_\Sigma(t)$  est maximale. Ceci revient à chercher la direction pour laquelle la puissance de l'enveloppe complexe associée, noté  $e_\Sigma(t)$ , est maximale. S'il n'y a qu'une seule source qui émet dans la direction  $\theta_1$ , on a

$$e_\Sigma(t) = a(t) \exp(j\varphi(t)) \sum_{n=1}^N w(\theta_1)^{n-1} = e(t) \sum_{n=1}^N w(\theta_1)^{n-1}, \quad (14)$$

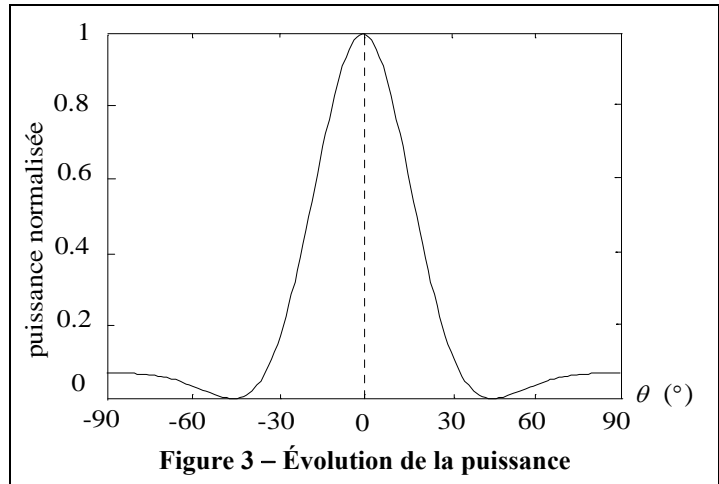
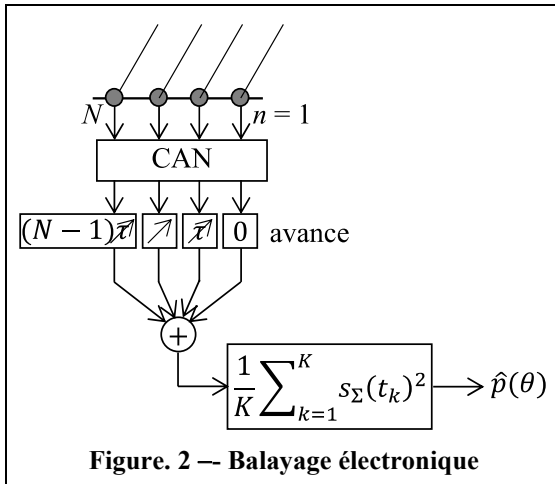
et le maximum de puissance est obtenu quand l'onde arrive orthogonalement à l'antenne ( $w(\theta_1) = 1$ ). L'inconvénient de cette méthode est sa lenteur et, de plus, la rotation de l'antenne entraîne une usure des pièces en mouvement.

## II.2/ BALAYAGE ÉLECTRONIQUE OU FORMATION DE VOIES OU BEAM FORMING

Plutôt que de faire tourner l'antenne pour « mettre en phase » les signaux arrivant sur les différents capteurs, on préfère « mettre en phase » les signaux de manière électronique en « avançant » le signal arrivant sur le récepteur  $n$  de  $(n-1)\tau$ , puis déterminer la valeur de  $\tau$  pour laquelle la puissance de la somme des signaux avancés est maximale (Figure 2). S'il n'y a qu'une seule source, cette valeur de  $\tau$  est reliée à la direction d'émission  $\theta_1$  par la relation  $\tau = d_0 \sin(\theta_1)/v$ . Une avance de  $\tau$  se traduit par une multiplication par  $\exp(j2\pi f_0 \tau)$  de l'enveloppe complexe, ainsi on a

$$e_{\Sigma}(t, \theta) = \mathbf{e}(t)^T \mathbf{g}(\theta)^* . \quad (15)$$

On cherche alors la valeur de  $\theta$  qui maximise la puissance  $p(\theta)$  du signal  $e_{\Sigma}(t, \theta)$ . S'il n'y a qu'une seule source, la position du maximum de puissance correspond à sa direction d'émission.



Dans la pratique, on n'a accès qu'aux signaux échantillonnés sur un horizon fini. De plus, ces signaux sont bruités. Ainsi on ne peut qu'estimer la puissance moyenne. Soit  $\hat{p}(\theta)$  la puissance moyenne estimée à partir des signaux échantillonnés qui sont stockés dans la matrice  $\mathbf{S}$ . La démarche de la méthode du balayage électronique est la suivante :

- 1/ acquisition ou simulation des signaux (stockés dans la matrice  $\mathbf{S}$ ),
- 2/ filtrage et détermination de l'enveloppe complexe des signaux reçus (stockés dans la matrice  $\mathbf{E}$ ),
- 3/ boucle sur  $\theta$  pour calculer  $\hat{p}(\theta)$ ,
- 4/ visualisation de  $\hat{p}(\theta)$ ,
- 5/ recherche (graphique) de la valeur de  $\theta = \hat{\theta}$  qui maximise  $\hat{p}(\theta)$ .

### Préparation 2 :

– La figure 3 représente l'évolution de  $p(\theta)$  pour une source quasi-monochromatique située en  $0^\circ$ . En déduire le pouvoir de résolution de la méthode (c'est-à-dire que si l'on considère deux sources décorréélées de même puissance qui émettent dans des directions différentes, quel doit être l'écart angulaire minimum entre ces deux sources pour que l'on puisse les distinguer/séparer) ?

– Vérifier que  $e_{\Sigma}(t, \theta) = \mathbf{e}(t) \mathbf{g}(\theta_1)^T \mathbf{g}(\theta)^*$ .

– Expliciter ensuite  $p(\theta)$  en fonction de la puissance du signal  $e(t)$  et de  $Nf_0d_0$ .

– Vérifier que le pouvoir de résolution dépend de  $Nf_0d_0$ .

– Démontrer que la puissance estimée  $\hat{p}(\theta)$  de l'enveloppe complexe des signaux acquis et stockés dans la matrice  $\mathbf{E}$  se met sous la forme

$$\hat{p}(\theta) = \frac{\|\mathbf{E}^H \mathbf{g}(\theta)\|^2}{K}, \quad (16)$$

où  $\mathbf{M}^H$  est la matrice transposée et conjuguée de  $\mathbf{M}$  ( $\mathbf{M}^H = \mathbf{M}^T^*$ ).

– Analyser et commenter les différentes lignes de la fonction balayage qui, sous Matlab™, à partir des signaux enregistrés dans la matrice  $\mathbf{S}$  estime la puissance moyenne  $\hat{p}(\theta)$  pour des valeurs discrètes de  $\theta \in ]-\pi/2, \pi/2[$ . Ce programme sera disponible le jour du TP.

```

fonction [theta,pui] = balayage(s);
d0=0.03; v=343; Fe=20000;
[f0,s_filtre]=trait(s,Fe); E=env(s_filtre,f0,Fe);

```

```

dim=size(E); N=dim(1); K=dim(2);
i=0;
for angle=-90:1:90;
    i=i+1;
    theta(i)=angle;
    tau= 0*sin(angle/180*pi)/v;
    w=exp(-j*2*pi*f0*tau);
    g= .^(0:N-1).';
    e_sum=E'*g;
    pui(i)=e_sum'*e_sum/K;
end;
plot(theta,pui); grid; axis([-90 90 0 1]);
xlabel('theta (°)'); title('puissance normalisée'); figure(1);

```

**Manipulation 2 :** La fonction  $\mathbf{S}=\text{sim}_1(\theta_1)$  engendre une matrice  $\mathbf{S}$  de dimension  $(N \times K)$  correspondant à des signaux quasi-monochromatiques non bruités de fréquence  $f_0 = 4 \text{ kHz}$  arrivant sur les différents capteurs distants de  $d_0 = 3 \text{ cm}$  et échantillonnés sur  $K = 2048$  points à la fréquence  $F_e = 20 \text{ kHz}$ , une seule source émettant dans la direction  $\theta_1$  (exprimée en degré), la vitesse de l'onde étant égale à  $v = 343 \text{ m/s}$ .

- Pour une valeur  $\theta_1$  donnée (par exemple  $\theta_1 = 0^\circ$ ), générer le signal simulé ( $\mathbf{S}$ ).
- Calculer la puissance estimée  $\hat{p}(\theta)$  pour des valeurs discrètes de  $\theta$  puis visualiser son évolution.
- Retrouver la direction d'émission de la source.
- Évaluer le pouvoir de résolution de la méthode.
- Pour la même valeur de  $\theta_1$ , générer un autre signal simulé puis visualiser l'évolution de  $\hat{p}(\theta)$ . Justifier l'origine de la différence de hauteur des *maxima* ?
- Recommencer l'étude pour différentes valeur de  $\theta_1$  et dresser une conclusion.

### Manipulation 3 :

- Faire des acquisitions des signaux arrivant sur l'antenne avec une seule source.
- Traiter ensuite les signaux acquis et déterminer la direction d'émission de la source.

**Manipulation 4 :** La fonction  $\mathbf{S}=\text{sim}_2(\theta_1, \theta_2)$  engendre une matrice  $\mathbf{S}$  de dimension  $(N \times K)$  correspondant à des signaux quasi-monochromatiques ayant les mêmes caractéristiques que ceux créés par la fonction  $\text{sim}_1$ , mais il y a maintenant deux sources qui émettent des signaux décorrélés non bruités de puissance identique : une source émet dans la direction  $\theta_1$  et l'autre dans la direction  $\theta_2$  (angles exprimés en degré).

- Générer des signaux simulés (par exemple avec  $\theta_2 = -\theta_1$  puis avec  $\theta_1 = 0^\circ$  et  $\theta_2$  variable), puis visualiser l'évolution de la puissance estimée.
- Retrouver le pouvoir de résolution  $\Delta\theta_{\text{balay}}$  de la méthode.
- Dresser une conclusion sur la méthode du balayage électronique.

Afin d'améliorer le pouvoir de résolution de la méthode d'autres méthodes, dites à haute résolution, vont être étudiées. Ces méthodes font des hypothèses supplémentaires sur le bruit.

## III/ MUSIC (MULTIPLE SIGNAL CLASSIFICATION)

### III.1/ PRINCIPE

Cette méthode est fondée sur la décomposition en valeurs propres de la matrice de covariance des signaux arrivant sur les différents capteurs de l'antenne. On rappelle que l'on suppose que ces signaux sont stationnaires et ergodiques. On suppose de plus que le bruit est additif. Ainsi l'enveloppe complexe  $\mathbf{x}(t)$  des signaux observés se met sous la forme

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{e}(t) + \mathbf{b}(t) = \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{e}_r(t) + \mathbf{b}(t), \quad (17)$$

où  $\mathbf{e}(t)$  est l'enveloppe complexe du signal utile et  $\mathbf{b}(t)$  celle du bruit. Tous ces vecteurs aux différents instants d'acquisition  $t_k$  ( $k = 1, \dots, K$ ) sont concaténés dans la matrice  $\mathbf{X}$ . On suppose de plus que le bruit est centré, spatialement blanc et que la puissance du bruit est la même sur tous les capteurs, c'est-à-dire que

$$\mathbb{E}[\mathbf{b}(t)\mathbf{b}(t)^H] = \sigma_b^2 \mathbf{I}, \quad (18)$$

où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité. Le bruit est supposé décorrélé du signal utile, ainsi

$$\mathbb{E}[\mathbf{b}(t)\mathbf{e}(t)^H] = \mathbf{0}. \quad (19)$$

Le vecteur  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{G}(\theta_1, \dots, \theta_M) \mathbf{e}_r(t) = (\mathbf{g}(\theta_1) \dots \mathbf{g}(\theta_M)) \mathbf{e}_r(t)$  appartient à l'espace engendré par les steering

vecteurs  $\mathbf{g}(\theta_m)$  ( $m=1, \dots, M$ ), encore appelé *sous-espace signal* et noté  $\mathcal{E}_S$ . Le sous-espace complémentaire, appelé *sous-espace bruit*, est noté  $\mathcal{E}_B$ .  $\mathcal{E}_S$  est de dimension au plus égale à  $M$ . Si les signaux sources ne sont pas totalement corrélés,  $E[\mathbf{e}_r(t)\mathbf{e}_r(t)^H]$  est de rang plein ( $M$ ) et le sous-espace  $\mathcal{E}_S$  est alors de dimension  $M$ . Dans le cas général, le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur  $\mathbf{e}(t)$ , ou encore le sous-espace  $\mathcal{E}_S$ , est de dimension  $M' \leq M$ .

La matrice de covariance du signal  $\mathbf{e}(t)$  (qui est centré) est la matrice carré de dimension  $N$  définie par

$$\Gamma_{\mathbf{ee}} = E[\mathbf{e}(t)\mathbf{e}(t)^H] = \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) E[\mathbf{e}_r(t)\mathbf{e}_r(t)^H] \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})^H. \quad (20)$$

Dans le cas général, cette matrice est de rang  $M' \leq M < N$ . Si les sources ne sont pas totalement corrélées, la décomposition en éléments propres de  $\Gamma_{\mathbf{ee}}$  donne  $M$  valeurs propres strictement positives  $\lambda_m$ ,  $m=1, \dots, M$ , correspondant aux  $M$  sources et des vecteurs propres associés orthogonaux  $\mathbf{u}_m$ ,  $m=1, \dots, M$ , ainsi que  $(N-M)$  valeurs propres nulles et des vecteurs propres associés orthogonaux  $\mathbf{u}_m$ ,  $m=M+1, \dots, N$ . Ces vecteurs  $\mathbf{u}_m$ ,  $m=M+1, \dots, N$ , sont également orthogonaux aux vecteurs  $\mathbf{u}_m$ ,  $m=1, \dots, M$ . Dans toute la suite, on suppose que les signaux sources ne sont pas totalement corrélés, ainsi  $M'=M$  et le sous-espace  $\mathcal{E}_S$  est de dimension maximale, soit  $M$ .

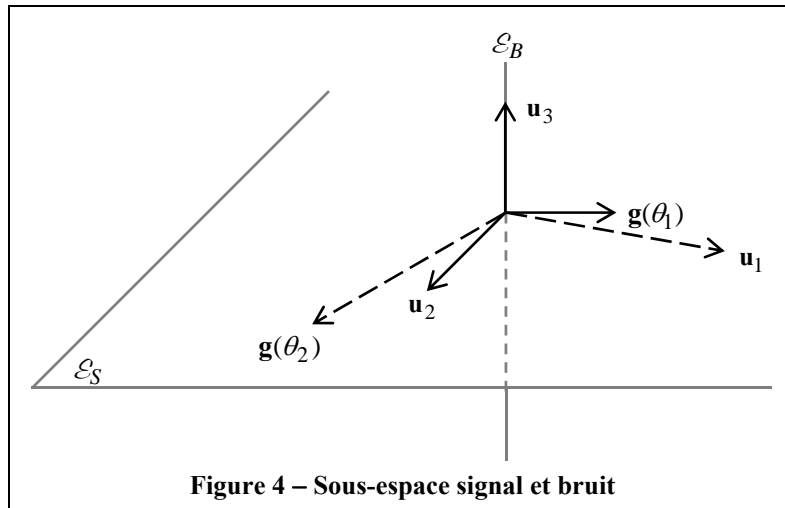
On note

$$\Gamma_{\mathbf{xx}} = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^H] \quad (21)$$

la matrice de covariance du vecteur  $\mathbf{x}(t)$ . Avec les hypothèses émises, on a

$$\Gamma_{\mathbf{xx}} = \Gamma_{\mathbf{ee}} + \sigma_b^2 \mathbf{I}. \quad (22)$$

La décomposition en éléments propres de  $\Gamma_{\mathbf{xx}}$  donne des valeurs propres positives ou nulles et des vecteurs propres orthogonaux entre eux. D'après la relation (22), les vecteurs propres de  $\Gamma_{\mathbf{ee}}$  sont aussi les vecteurs propres de  $\Gamma_{\mathbf{xx}}$  mais avec comme valeur propre associée  $l_m = \lambda_m + \sigma_b^2$ ,  $m=1, \dots, M$ . Les  $M$  plus grandes valeurs propres de  $\Gamma_{\mathbf{xx}}$  correspondent donc aux  $M$  valeurs propres de  $\Gamma_{\mathbf{ee}}$ . Les  $(N-M)$  autres valeurs propres correspondent au bruit et elles sont égales à  $\sigma_b^2$ . L'ordonnancement des valeurs propres de  $\Gamma_{\mathbf{xx}}$  permet donc de séparer les deux sous-espaces vectoriels : le sous-espace signal  $\mathcal{E}_S$ , engendré par les vecteurs  $\mathbf{u}_m$ ,  $m=1, \dots, M$ , correspondant aux  $M$  valeurs propres les plus grandes, et le sous-espace bruit  $\mathcal{E}_B$ , engendré par les vecteurs  $\mathbf{u}_m$ ,  $m=M+1, \dots, N$ , correspondant aux  $(N-M)$  valeurs propres les plus petites. C'est sur cette propriété qu'est fondée la méthode à haute résolution MUSIC.



Soit  $\mathbf{v}$  un vecteur quelconque du sous-espace bruit  $\mathcal{E}_B$ . Ainsi tout vecteur  $\mathbf{w}$  du sous-espace signal  $\mathcal{E}_S$  lui est orthogonal :  $\mathbf{w}^H \mathbf{v} = 0$ . Cette relation est vérifiée pour tout vecteur du sous-espace signal  $\mathcal{E}_S$  et donc, en particulier, pour tous les steering vecteurs  $\mathbf{g}(\theta_m)$  définis précédemment (Figure 4). On a alors

$$\forall m \in [1, M] \text{ et } \forall \mathbf{v} \in \mathcal{E}_B : \mathbf{g}(\theta_m)^H \mathbf{v} = 0. \quad (23)$$

Pour la méthode MUSIC, au lieu de choisir un vecteur particulier du sous-espace bruit  $\mathcal{E}_B$ , on choisit l'ensemble des vecteurs propres. Théoriquement les steering vecteurs  $\mathbf{g}(\theta_m)$  doivent vérifier



$$\sum_{i=M+1}^N \left| \mathbf{g}(\theta_m)^H \mathbf{u}_i \right|^2 = 0. \quad (24)$$

### III.2/ MISE EN ŒUVRE

En pratique, la matrice de covariance  $\Gamma_{\mathbf{xx}}$  ne peut être estimée qu'à partir des signaux enregistrés aux instants d'échantillonnage  $t_k$  ( $k=1, \dots, K$ ) et  $\Gamma_{\mathbf{xx}}$  est remplacée par son estimée

$$\hat{\Gamma}_{\mathbf{xx}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(t_k) \mathbf{x}(t_k)^H. \quad (25)$$

Le nombre de termes moyennés doit assurer le rang plein de  $\hat{\Gamma}_{\mathbf{xx}}$ , ainsi on doit avoir  $K \geq N$ . Le fait que la matrice de covariance  $\Gamma_{\mathbf{xx}}$  est remplacée par son estimée  $\hat{\Gamma}_{\mathbf{xx}}$  génère des erreurs qui peuvent créer des difficultés pour estimer le nombre de sources et leur direction d'émission. Ainsi les vecteurs propres obtenus à partir de  $\hat{\Gamma}_{\mathbf{xx}}$  ne vont plus rigoureusement vérifier les relations (23) et (24).

On note  $\hat{\mathbf{u}}_i$  les vecteurs propres de la matrice  $\hat{\Gamma}_{\mathbf{xx}}$ . La fonction

$$f(\theta) = \sum_{i=M+1}^N \left| \mathbf{g}(\theta)^H \hat{\mathbf{u}}_i \right|^2 = \mathbf{g}(\theta)^H \sum_{i=M+1}^N \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i^H \mathbf{g}(\theta) = \mathbf{g}(\theta)^H \hat{\mathbf{\Pi}}_B \mathbf{g}(\theta) \quad (26)$$

avec

$$\hat{\mathbf{\Pi}}_B = \sum_{i=M+1}^N \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i^H \quad (27)$$

va présenter  $M$  minima en  $\theta = \hat{\theta}_m$  ( $m=1, \dots, M$ ), et la fonction  $h(\theta) = 1/f(\theta)$   $M$  maximums qui sont plus faciles à mettre en évidence que les minima. Il existe des variantes de la méthode MUSIC qui donne lieu à d'autres méthodes à haute résolution.

Partant de la matrice contenant les enveloppes complexes des signaux acquis, la démarche de la méthode MUSIC est la suivante :

- 1/ calcul de  $\hat{\Gamma}_{\mathbf{xx}}$  puis de ses valeurs propres et ses vecteurs propres,
- 2/ calcul de  $\hat{\mathbf{\Pi}}_B$ ,
- 3/ boucle sur  $\theta$  pour calculer  $h(\theta)$ ,
- 4/ visualisation de  $h(\theta)$ ,
- 5/ recherche (graphique) des valeurs de  $\theta = \hat{\theta}_m$  qui maximisent  $h(\theta)$ .

#### Préparation 3 :

- Démontrer que  $\hat{\Gamma}_{\mathbf{xx}} = \frac{1}{K} \mathbf{X} \mathbf{X}^H$ .
- La fonction  $[\mathbf{V}, \mathbf{D}] = \text{eig\_ord}(\mathbf{A})$ , spécialement écrite pour ce TP, détermine les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice  $\mathbf{A}$ .  $\mathbf{D}$  est une matrice diagonale contenant les valeurs propres ordonnées suivant les valeurs décroissantes et  $\mathbf{V}$  est la matrice obtenue par concaténation des vecteurs propres associés (vecteurs colonne). Pour  $M=2$ , écrire un programme qui, sous Matlab™, à partir des signaux  $\mathbf{S}$ , détermine les éléments nécessaires pour le calcul de  $h(\theta)$  puis calcule cette fonction pour des valeurs discrètes de  $\theta \in ]-\pi/2, \pi/2[$ .

**Manipulation 5 :** La fonction  $\mathbf{S} = \text{sim\_2\_c}(\theta_1, \theta_2, c, RBS)$  engendre une matrice  $\mathbf{S}$  correspondant à des signaux quasi-monochromatiques ayant toujours les mêmes caractéristiques que les signaux précédents, les sources étant maintenant corrélées : coefficient de corrélation  $c$ , et de plus les signaux étant bruités :  $RBS$  est le rapport de la puissance du bruit sur la puissance du signal utile.

- Pour  $\theta_1 = 0^\circ$ ,  $\theta_2 = \Delta\theta_{\text{balay}}$ ,  $c = 0$  et  $RBS = 0$ , vérifier que la méthode permet de séparer les deux sources. (En cas de problème, utiliser la fonction  $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2] = \text{music}(\mathbf{S})$  pour estimer les directions d'émission des sources à partir du signal  $\mathbf{S}$ .)
- Faire différents essais avec des signaux simulés pour quelques directions d'émission (prendre par exemple  $\theta_1 = 0^\circ$  et  $\theta_2$  variable), différents coefficients de corrélation  $|c| < 0.9995$  et quelques valeurs de  $RBS$  (par exemple, 0.1). Que se passe-t-il lorsque le coefficient de corrélation augmente ?
- Faire des acquisitions avec deux sources plus ou moins corrélées puis traiter les signaux pour en déduire les directions d'émission des sources.
- Dresser une conclusion sur la méthode MUSIC.

## IV/ MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

### IV.1/ PRINCIPE

Rechercher la direction d'émission des sources est un problème d'estimation particulier, les paramètres que l'on cherche à estimer étant avant tout les angles d'émission des sources ou encore le vecteur  $\boldsymbol{\theta}$ . On rappelle que les hypothèses émises on conduit à la modélisation suivante des signaux reçus encore appelés observations (17) :  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{e}_r(t) + \mathbf{b}(t)$ . On ajoute tout d'abord l'hypothèse que le bruit est gaussien. On alors la densité de probabilité (ddp) conditionnelle suivante

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t)/\boldsymbol{\theta}, \mathbf{e}_r(t), \sigma_b) &= f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t)/\theta_1, \dots, \theta_M, \mathbf{e}_r(t), \sigma_b) \\ &= \frac{1}{(\pi\sigma_b^2)^N} \exp\left(-\frac{1}{\sigma_b^2} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{e}_r(t))^H (\mathbf{x}(t) - \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{e}_r(t))\right). \end{aligned} \quad (28)$$

On suppose de plus que le bruit  $\mathbf{b}(t)$  est indépendant du bruit  $\mathbf{b}(t')$  (pour  $t' \neq t$ ) ; on peut ainsi écrire que

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}/\boldsymbol{\theta}, \mathbf{E}_r, \sigma_b) &= f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{x}(t_K)/\theta_1, \dots, \theta_M, \mathbf{e}_r(t_1), \dots, \mathbf{e}_r(t_K), \sigma_b) \\ &= \prod_{k=1}^K f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t_k)/\boldsymbol{\theta}, \mathbf{e}_r(t_k), \sigma_b) \\ &= \frac{1}{(\pi\sigma_b^2)^{KN}} \exp\left(-\frac{1}{\sigma_b^2} \sum_{k=1}^K (\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{e}_r(t_k))^H (\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{e}_r(t_k))\right) \\ &= V(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{E}_r, \sigma_b). \end{aligned} \quad (29)$$

Les grandeurs  $\boldsymbol{\theta}$ ,  $\mathbf{E}_r$  et  $\sigma_b$  sont inconnues. La fonction  $V(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{E}_r, \sigma_b)$  est appelée fonction de vraisemblance. La méthode du maximum de vraisemblance (MV) consiste, à observations  $\mathbf{x}(t_k)$  ( $k = 1, \dots, K$ ) données ou encore à matrice  $\mathbf{X}$  donnée, à déterminer les valeurs de  $\boldsymbol{\theta}$ ,  $\mathbf{E}_r$  et  $\sigma_b$  maximisant la fonction de vraisemblance.

#### Préparation 4 :

– Justifier l'expression de la ddp conditionnelle (2).

### IV.2/ MISE EN ŒUVRE

Compte tenu de la forme de la fonction de vraisemblance, une solution analytique très simple des angles  $\theta_m$  ( $m = 1, \dots, M$ ) approchant la solution optimale peut être obtenue (cf. Annexe). On démontre qu'elle correspond aux angles qui minimisent la trace de la matrice  $(\boldsymbol{\Pi}_B(\boldsymbol{\theta}) \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{\mathbf{xx}})$  avec

$$\boldsymbol{\Pi}_B(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi}_S(\boldsymbol{\theta}) \quad (30)$$

et

$$\boldsymbol{\Pi}_S(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) (\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})^H \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}))^{-1} \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})^H. \quad (31)$$

$\boldsymbol{\Pi}_S(\boldsymbol{\theta})$  est le projecteur sur le sous-espace signal engendré par les steering vecteurs  $\mathbf{g}(\theta_m)$  ( $m = 1, \dots, M$ ). Les angles estimés  $\hat{\theta}_m$  ( $m = 1, \dots, M$ ) sont alors définis par

$$(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_M) = \arg \min_{\theta_1, \dots, \theta_M} \text{trace}(\boldsymbol{\Pi}_B(\theta_1, \dots, \theta_M) \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{\mathbf{xx}}). \quad (32)$$

On pose  $\text{crit}(\theta_1, \dots, \theta_M) = \text{trace}(\boldsymbol{\Pi}_B(\boldsymbol{\theta}) \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{\mathbf{xx}})$ .

Partant des acquisitions de l'enveloppe complexe des signaux reçus, la démarche de la méthode du maximum de vraisemblance est la suivante :

- 1/ calcul de  $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{\mathbf{xx}}$ ,
- 2/ boucle sur  $\theta_1, \dots, \theta_M$  (différents) pour calculer  $\text{trace}(\boldsymbol{\Pi}_B(\theta_1, \dots, \theta_M) \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{\mathbf{xx}})$ ,
- 3/ visualisation de la fonction  $\text{trace}(\boldsymbol{\Pi}_B(\theta_1, \dots, \theta_M) \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{\mathbf{xx}})$ ,
- 4/ recherche des valeurs de  $\theta_1, \dots, \theta_M$  minimisant  $\text{trace}(\boldsymbol{\Pi}_B(\theta_1, \dots, \theta_M) \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{\mathbf{xx}})$ .

On considère deux sources qui émettent dans des directions différentes. La numérotation des sources étant arbitraire, on a  $\text{crit}(\theta_1, \theta_2) = \text{crit}(\theta_2, \theta_1)$ . La fonction  $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2] = \text{mv}(\mathbf{S})$  permet d'estimer les angles avec la méthode du maximum de vraisemblance à partir du signal  $\mathbf{S}$ .

#### Manipulation 6 :

- Faire différents essais avec des signaux simulés pour quelques directions d'émission et différents coefficients de corrélation relativement élevés.
- Traiter les signaux acquis et en déduire les directions d'émission des sources.
- Comparer les différentes méthodes et dresser une conclusion générale.



## ANNEXE – CRITÈRE DE LA MÉTHODE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

Compte tenu de la forme de la fonction de vraisemblance (29), la recherche des valeurs de  $\boldsymbol{\theta}$ ,  $\mathbf{E}_r$  et  $\sigma_b$  maximisant cette fonction peut être effectuée en trois étapes :

- 1- recherche des valeurs de  $\mathbf{e}_r(t_k)$  ( $k = 1, \dots, K$ ), notées  $\hat{\mathbf{e}}_r(t_k)$ , maximisant (29),
  - 2- pour  $\mathbf{e}_r(t_k) = \hat{\mathbf{e}}_r(t_k)$  ( $k = 1, \dots, K$ ), recherche de la valeur de  $\sigma_b$ , notée  $\hat{\sigma}_b$ , maximisant (29),
  - 3- pour les valeurs optimales trouvées précédemment, recherche des angles  $\hat{\theta}_m$  ( $m = 1, \dots, M$ ) maximisant (29).
- Ces trois étapes vont maintenant être détaillées.

Dans un premier temps, on cherche les valeurs de  $\mathbf{e}_r(t_k)$  ( $k = 1, \dots, K$ ) minimisant les fonctions

$$c_k = (\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{e}_r(t_k))^H (\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{e}_r(t_k)) \quad (k = 1, \dots, K). \quad (33)$$

Ce minimum est obtenu lorsque le gradient de  $c_k$  s'annule :

$$\nabla_{\mathbf{e}_r} c_k = -2 \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})^H (\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{e}_r(t_k)) = \mathbf{0} \quad (k = 1, \dots, K), \quad (34)$$

soit encore pour

$$\mathbf{e}_r(t_k) = \hat{\mathbf{e}}_r(t_k) = (\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})^H \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}))^{-1} \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})^H \mathbf{x}(t_k) \quad (k = 1, \dots, K). \quad (35)$$

On a alors

$$c_k \Big|_{\min} = \mathbf{x}(t_k)^H (\mathbf{I} - \mathbf{\Pi}_S(\boldsymbol{\theta})) \mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}(t_k)^H \mathbf{\Pi}_B(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{x}(t_k). \quad (36)$$

On cherche ensuite la valeur (scalaire) de  $\sigma_b$  qui maximise la valeur de la fonction

$$V(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \hat{\mathbf{e}}_r(t_1), \dots, \hat{\mathbf{e}}_r(t_K), \sigma_b) = \frac{1}{(\pi\sigma_b^2)^{KN}} \exp\left(-\frac{1}{\sigma_b^2} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(t_k)^H \mathbf{\Pi}_B(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{x}(t_k)\right). \quad (37)$$

Après calculs, on obtient

$$\hat{\sigma}_b^2 = \frac{2}{KN} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(t_k)^H \mathbf{\Pi}_B(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{x}(t_k). \quad (38)$$

On rappelle que si on considère deux vecteurs colonne  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  et une matrice carré  $\mathbf{A}$ , on a

$$\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{v} = \text{trace}(\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{v}) = \text{trace}(\mathbf{A} \mathbf{v} \mathbf{u}^T). \quad (39)$$

Ainsi on obtient

$$\hat{\sigma}_b^2 = \frac{2}{KN} \text{trace}\left(\mathbf{\Pi}_B(\boldsymbol{\theta}) \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(t_k) \mathbf{x}(t_k)^H\right) = \frac{2}{N} \text{trace}(\mathbf{\Pi}_B(\boldsymbol{\theta}) \hat{\Gamma}_{\mathbf{xx}}) \quad (40)$$

et

$$V(\mathbf{X}, \theta_1, \dots, \theta_M, \hat{\mathbf{e}}_r(t_1), \dots, \hat{\mathbf{e}}_r(t_K), \hat{\sigma}_b) \Big|_{\min} = \frac{1}{(\pi\hat{\sigma}_b^2)^{KN}} \exp\left(-\frac{KN}{2}\right). \quad (41)$$

Les directions d'émission des sources sont obtenues en recherchant les valeurs de  $\theta_1, \dots, \theta_M$  maximisant la fonction précédente ou encore minimisant  $\hat{\sigma}_b$  ou encore la fonction

$$\text{crit}(\theta_1, \dots, \theta_M) = \text{trace}(\mathbf{\Pi}_B(\boldsymbol{\theta}) \hat{\Gamma}_{\mathbf{xx}}). \quad (42)$$

La méthode du maximum de vraisemblance permet d'obtenir non seulement les directions d'émission des sources mais aussi les différents signaux émis par ces sources (35) et la puissance du bruit (38). Cette méthode permet donc de séparer les signaux émis par des sources.

