Université Paris-Saclay

Master e3a
électronique, énergie électrique, automatique
1ère année – site Orsay-Cachan

UE 451 – TRAITEMENT DU SIGNAL **2018-2019**

EXTRAITS D'EXAMEN

Cécile DURIEU

Préliminaire

Ce document regroupe des exercices d'application du cours qui sont des extraits d'examens. Ces exercices constituent une base pour vous permettre de tester vos connaissances et vous entraîner. Des éléments de correction sont donnés afin de vous permettre de travailler en autonomie, cependant n'hésitez pas à contacter l'équipe pédagogique.

Table des matières

PROBABILITÉ ET VARIABLES ALÉATOIRES

I/ INDÉPENDANCE DEUX À DEUX ET DANS LEUR ENSEMBLE

On considère une expérience aléatoire dont les événements élémentaires sont ω_i, $i = 1, \ldots, 4$. On suppose que tous les événements sont équiprobables.

1/ Quelle est la probabilité que l'événement ω_i soit réalisé ?

On considère les événements suivants : $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B = \{\omega_2, \omega_3\}$ et $C = \{\omega_1, \omega_3\}$.

2/ Quelle est la probabilité que les événements A, B et C soient réalisés ?

3/ Quelle est la probabilité que les événements $A.B$, $A.C$ et $B.C$ soient réalisés ?

4/ Discuter de l'indépendance deux à deux des événements A, B et C ?

5/ Quelle est la probabilité que l'événement $A.B.C$ soit réalisé ?

6/ Discuter de l'indépendance dans leur ensemble des événements A, B et C.

II/ VARIABLES ALÉATOIRES

Soit ϕ une variable aléatoire (VA) scalaire et réelle de densité de probabilité (ddp) quelconque. On considère les VA X et Y définies par $X = \cos\phi$ et $Y = \sin\phi$.

1/ Discuter de l'indépendance des VA X et Y.

ϕ est maintenant une VA uniformément répartie entre 0 et π.

2/ Expliciter $f_\phi(\varphi)$, ddp de la VA ϕ.

3/ Préciser où se trouvent dans le plan les points correspondants à différentes réalisations du couple aléatoire (X, Y).

4/ Sans faire de calculs et par un raisonnement simple, préciser la valeur moyenne m_X de la VA X ainsi que le signe de la valeur moyenne m_Y de la VA Y.

On rappelle que $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$, $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$ et $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$.

5/ Calculer m_X ainsi que l'écart type σ_X de la VA X.

6/ Calculer m_Y ainsi que $\mathrm{E}[Y^2]$ puis σ_Y, écart type de la VA Y.

7/ Discuter de la corrélation des VA X et Y.

III/ CHANGEMENT DE VARIABLES ALÉATOIRES

Soient U et V deux variables aléatoires (va) indépendantes et uniformément réparties sur $]0, 1]$. On définit tout d'abord les VA $\Psi = 2\pi U$ et $R = \sqrt{-2\,\mathrm{Ln}V}$.

1/ Déterminer la densité de probabilité (ddp) de la VA Ψ puis celle de la VA R. En déduire la ddp conjointe de ces VA.

On définit ensuite les VA

$$\begin{cases} X = a + bR\cos\Psi, \\ Y = c + dR\sin\Psi, \end{cases}$$

a, b, c et d étant des constantes réelles.

2/ Déterminer la ddp conjointe des VA X et Y, et les caractériser au mieux.

3/ On souhaite que X ait une valeur moyenne m_X et un écart type σ_X donnés. Quelle valeur doit-on donner à a et à b ?

IV/ SOMME DE VARIABLES ALÉATOIRES INDÉPENDANTES

Soient X et Y deux variables aléatoires (VA) réelles, scalaires et continues de densité de probabilité (ddp) conjointe $f_{XY}(x, y)$.

1/ Expliciter $f_Y(y)$, ddp marginale de la VA Y, en fonction de $f_{XY}(x, y)$.

2/ Expliciter $f_{X/Y=y}(x)$, ddp conditionnelle de la VA X sachant que la VA Y est fixée et égale y, en fonction de $f_{XY}(x, y)$ et de $f_Y(y)$.

On considère dans toute la suite les VA $Z_0 = x_0 + Y$ et $Z = X + Y$, où x_0 est une constante réelle et scalaire.

3/ Expliciter la ddp de la VA Z_0. (On prendra soin de bien préciser le raisonnement suivi.)

4/ Expliciter la ddp conjointe des VA X et Z en fonction de $f_{XY}(.,.)$. (On prendra soin de bien préciser le raisonnement suivi.) En déduire l'expression de $f_{Z/X=x_0}(z)$ en fonction de $f_{XY}(.,.)$ et de $f_X(.)$. Qu'observe-t-on quand les VA X et Y sont indépendantes ?

V/ VARIABLES ALÉATOIRES MIXTES

Soit X une variable aléatoire (VA) discrète prenant les valeurs -1 et $+1$. La valeur $+1$ est prise avec la probabilité p.

1/ Exprimer la valeur moyenne de la VA X puis sa variance, sa fonction caractéristique, sa fonction de répartition et enfin sa densité de probabilité (ddp).

Soit Y une VA uniformément répartie entre -1 et $+1$.

2/ Exprimer sa ddp, sa fonction de répartition, sa valeur moyenne puis sa fonction caractéristique.

Soit maintenant Y une VA continue de ddp $f_Y(y)$ quelconque. X est toujours la VA discrète définie précédemment. On suppose que les VA X et Y définies précédemment sont indépendantes. On considère la VA $Z = X + Y$ et la VA $W = X\,Y$.

3/ Exprimer la fonction de répartition de la VA Z en fonction de celle de la VA Y et de p. En déduire la ddp de la VA Z en fonction de $f_Y(y)$ et de p.

4/ Exprimer la ddp de la VA W en fonction de $f_Y(y)$ et de p.

Y est maintenant une VA gaussienne centrée et d'écart type σ.

5/ Exprimer la ddp de la VA W. Conclure.

VI/ VARIABLE ALÉATOIRE GAUSSIENNE CIRCULAIRE ET RAPPORT DE VARIABLES ALÉATOIRES GAUSSIENNES

On considère tout d'abord une variable aléatoire (VA) X gaussienne, scalaire, réelle, de moyenne m et d'écart type σ.

1/ Rappeler l'expression de sa densité de probabilité (ddp).

Dans toute la suite, on considère deux VA X et Y gaussiennes, scalaires, réelles, centrées et de même écart type σ. On suppose de plus que ces VA sont indépendantes.

2/ Expliciter la ddp conjointe $f_{XY}(x, y)$ des VA X et Y.

3/ On pose $Z = (X\ Y)^{\mathrm{T}}$. En déduire l'expression de la ddp $f_Z(z)$ de la VA Z.

À partir des VA X et Y définies précédemment, on construit la VA scalaire et complexe $Z = X + j\,Y$ (avec $j^2 = -1$).

4/ Expliciter la moyenne ainsi que l'écart type σ_Z de la VA Z.

5/ Expliciter la ddp de la VA Z uniquement en fonction de z et σ_Z. On dit que la VA Z est gaussienne circulaire.

On suppose de plus les VA X et Y sont réduites (moyenne nulle et écart type unitaire) et on considère maintenant la VA $Z = Y/X$ avec $X \neq 0$.

6/ Expliciter $F_Z(z)$, fonction de répartition de la VA Z, en fonction de la notion de probabilité en faisant intervenir les VA X et Y.

7/ Représenter dans le plan l'ensemble des couples (X, Y) conduisant à une valeur de $Z = Y/X < z$.

8/ En déduire tout d'abord une expression intégrale de $F_Z(z)$ en fonction de $f_{XY}(x, y)$.

9/ Exprimer tout d'abord $f_Z(z)$, ddp de la VA Z, en fonction de $F_Z(z)$.

10/ En déduire l'expression de $f_Z(z)$.

11/ Vérifier que $f_Z(z)$ est bien normalisée.

12/ Que peut-on dire de la moyenne de la VA Z ?

L'expression de $f_Z(z)$ va être retrouvée en considérant le changement de VA suivant : $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Z = Y/X \end{pmatrix}$.

13/ Exprimer tout d'abord $f_{XZ}(x, z)$, ddp du couple aléatoire (X, Z), en fonction de la ddp du couple (X, Y).

14/ Expliciter $f_{XZ}(x, z)$.

15/ Exprimer $f_Z(z)$ en fonction de $f_{XZ}(x, z)$.

16/ Retrouver l'expression de $f_Z(z)$.

VII/ VARIABLES ALÉATOIRES GAUSSIENNES

Soit X une variable aléatoire (VA) vectorielle de dimension $(n \times 1)$. Sa fonction de répartition est notée $F_X(x)$, sa densité de probabilité (ddp) $f_X(x)$, sa fonction caractéristique $\varphi_X(u) = \mathrm{E}\left[\exp(j u^T X)\right]$, u étant un vecteur de dimension $(n \times 1)$, sa moyenne m_X et sa matrice de covariance C_{XX}.

Le but de cet exercice est d'établir quelques propriétés des VA gaussiennes, tout d'abord scalaires puis vectorielles. On rappelle que la transformée de Fourier (TF) du signal $f(x) = \exp(-\pi x^2)$, x étant scalaire, est $F(\gamma) = \exp(-\pi \gamma^2)$.

1[re] partie – Variables aléatoires scalaires

Soit X une VA scalaire, gaussienne et réduite.

1/ Rappeler l'expression de sa ddp, $f_X(x)$.

2/ Vérifier que sa fonction caractéristique est $\varphi_X(u) = \exp\left(-u^2/2\right)$.

On considère la VA $Y = aX + b$, où a et b sont deux réels connus et $a \neq 0$.

3/ Expliciter sa moyenne, m_Y, ainsi que son écart type, σ_Y, en fonction de a et de b.

4/ Après avoir rappelé les éléments nécessaires concernant les changements de VA, exprimer la ddp, $f_Y(y)$, ainsi que la fonction caractéristique, $\varphi_Y(u)$, de la VA Y en fonction de m_Y et de σ_Y.

On dit que Y une VA gaussienne de moyenne m_Y et d'écart type σ_Y.

2[e] partie – Variables aléatoires vectorielles

On considère une suite $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de n VA identiques, scalaires, gaussiennes, réduites et indépendantes dans leur ensemble.

5/ Exprimer la ddp marginale de chacune de ces VA ainsi que la ddp conjointe de ces VA.

On considère le vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^{\mathrm{T}}$.

6/ Exprimer la ddp du vecteur aléatoire X, $f_X(x)$, uniquement en fonction de n et du vecteur x.

7/ Exprimer la fonction caractéristique, $\varphi_X(u)$, du vecteur aléatoire X uniquement en fonction du vecteur u.

On considère maintenant la VA $Y = A\,X + B$ où A étant une matrice connue, inversible, de dimension $(n \times n)$ et B un vecteur connu de dimension n.

8/ Exprimer la valeur moyenne, m_Y, de la VA Y ainsi que sa matrice de covariance, C_{YY}, en fonction de A et B uniquement. On précise que si $y = A\,x$, où A est une matrice constante, alors la matrice jacobienne est $J = A$.

9/ Après avoir rappelé les éléments nécessaires concernant les changements de VA, donner l'expression de la ddp, $f_Y(y)$, de la VA Y en fonction de n, A et B. Exprimer ensuite $f_Y(y)$ uniquement en fonction de m_Y, C_{YY} et n.

10/ Exprimer $\varphi_Y(u)$, fonction caractéristique de la VA Y, en fonction de m_Y et C_{YY}.

On dit que la VA Y est une VA gaussienne de dimension n ou encore que les VA $Y_i, Y_2, \ldots, Y_n$ sont gaussiennes dans leur ensemble.

3[e] partie – Combinaison linéaire de variables aléatoires

Soit $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^{\mathrm{T}}$ un vecteur aléatoire gaussien, de moyenne m_X et de matrice de covariance C_{XX}. Le but de la suite de cet exercice est de démontrer que si toute combinaison linéaire des VA $X_i, X_2, \ldots, X_n$ est une VA gaussienne alors le vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^{\mathrm{T}}$ est gaussien.

Soient $X_i, X_2, \ldots, X_n$ une suite de n VA et la VA $Y = \sum_{i=1}^{n} u_i X_i = u^{\mathrm{T}} X$, où $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^{\mathrm{T}}$. On suppose que Y est une VA gaussienne quelle que soit la pondération des VA $X_i, X_2, \ldots, X_n$, soit encore quel que soit le vecteur u. La fonction caractéristique de la VA Y est alors $\varphi_Y(t) = \exp(jtm_Y)\exp\left(-\sigma_Y^2 t^2/2\right)$, où m_Y est la moyenne de la VA Y et σ_Y son écart type. On pose $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^{\mathrm{T}}$.

11/ Rappeler la définition de C_{XX}, matrice de covariance du vecteur aléatoire X.

12/ Que peut-on dire des VA X_i ($i = 1, \ldots, n$) ?

13/ Expliciter la moyenne, m_Y, ainsi que l'écart type, σ_Y, de la VA Y, en fonction de m_X, C_{XX} et u.

14/ Expliciter la fonction caractéristique de la VA Y, $\varphi_Y(t)$, en fonction de $\varphi_X(.)$, fonction caractéristique du vecteur aléatoire X.

15/ En partant de l'expression de $\varphi_Y(1)$, en déduire l'expression de la fonction caractéristique, $\varphi_X(u)$, du vecteur aléatoire gaussien X en fonction de m_X, C_{XX} et u.

16/ D'après ce qui précède, en déduire l'expression de $f_X(x)$. Conclure.

17/ On suppose que les différentes composantes du vecteur aléatoire gaussien X sont décorrélées. Quelle est la conséquence sur la matrice de covariance ? Que peut-on dire des $X_i, X_2, \ldots, X_n$?

18/ Déduire de ce qui précède que si $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^{\mathrm{T}}$ est un vecteur aléatoire gaussien alors la VA $Y = \sum_{i=1}^{n} u_i X_i = u^{\mathrm{T}} X$ est gaussienne quelle que soit la pondération des VA $X_i, X_2, \ldots, X_n$. Conclure.

VIII/ SOMME DE VARIABLES ALÉATOIRES GAUSSIENNES

Soient X et Y deux VA scalaires, gaussiennes, réduites et indépendantes, et deux scalaires certains s et t tels que $s^2 + t^2 = 1$.

1/ Expliciter la ddp marginale des VA X et Y, notées respectivement $f_X(x)$ et $f_Y(y)$, ainsi que la ddp conjointe $f_{XY}(x,y)$ du couple aléatoire (X,Y).

2/ Les VA X et Y sont-elles corrélées ?

On considère les VA $U = sX + tY$ et $V = tX - sY$.

3/ Calculer leur moyenne, leur écart type ainsi que leur covariance.

4/ Expliciter la ddp conjointe des VA U et V.

Soient X, Y et Z trois VA gaussiennes dans leur ensemble, centrées et de matrice de covariance I, matrice identité de dimension 3.

5/ Quelle est la ddp de la VA $W = X + Y + Z$?

6/ Montrer que les VA $X - Y$, $Y - Z$ et $Z - X$ sont chacune indépendante de la VA W.

IX/ VARIABLES ALÉATOIRES GAUSSIENNES : CONTRE-EXEMPLE 1

On considère une fonction de deux variables (VA) scalaires définie par

$$g(x,y) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)\right) - f(x)f(y),$$

avec

$$f(x) = \begin{cases} a\left(x^2 - b\right) \text{si } |x| < 3, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1/ Pour quelle valeur de b la fonction $g(x,y)$ peut-elle être la ddp d'un couple aléatoire (X,Y) ? Donner une condition suffisante sur a pour que $g(x,y)$ soit une ddp (il n'est pas demandé de faire l'application numérique).

Dans toute la suite, on suppose les conditions remplies.

2/ Expliciter la ddp marginale de la VA X. Commenter le résultat obtenu.

3/ Les VA X et Y sont-elles indépendantes ? Sont-elles décorrélées ? Conclure.

4/ La VA $Z = X + Y$ est-elle gaussienne ?

X/ VARIABLES ALÉATOIRES GAUSSIENNES : CONTRE-EXEMPLE 2

Soit X une variable aléatoire (VA) continue, scalaire et réelle, de densité de probabilité (ddp) $f_X(x)$.

1/ Rappeler la définition de sa fonction de répartition, $F_X(x)$, en fonction de la notion de probabilité puis en fonction de sa ddp $f_X(.)$.

2/ Rappeler l'expression de la fonction caractéristique, $\varphi_X(u)$, de la VA X.

La VA X est maintenant une VA gaussienne et réduite. Sa fonction caractéristique est alors $\varphi_X(u) = \exp\left(-u^2/2\right)$.

3/ Représenter l'évolution de $f_X(x)$. Expliciter $F_X(-x)$ en fonction de $F_X(x)$.

Soit Y une VA définie par $Y = \varepsilon X$ où ε est une VA indépendante de la VA X prenant les valeurs $+1$ ou -1 avec la même probabilité.

4/ Expliciter la fonction de répartition, $F_Y(y)$, de la VA Y en fonction de $F_X(x)$. En déduire que Y est une VA gaussienne dont on précisera sa moyenne et son écart type.

On considère la VA $Z = X + Y$.

5/ La VA Z est-elle continue ou discrète ou mixte ? En déduire si la VA Z peut être une VA gaussienne.

6/ Expliciter la fonction caractéristique, $\varphi_Z(u)$, de la VA Z. En déduire si la VA Z peut être une VA gaussienne.

7/ Expliciter la fonction caractéristique du couple aléatoire (X,Y). En déduire si ce couple peut être gaussien.

XI/ LOI DE CAUCHY

Soit X une variable aléatoire (VA) continue, scalaire et réelle, de densité de probabilité (ddp) $f_X(x)$.

1/ Rappeler la définition de la fonction de répartition $F_X(x)$ de la VA X en fonction de la notion de probabilité puis en fonction de $f_X(.)$.

2/ Rappeler l'expression de la fonction caractéristique $\varphi_X(u)$ de la VA X. Que vaut $\varphi_X(0)$? Discuter de l'existence de $\varphi_X(u)$. Comparer $|\varphi_X(u)|$ à $\varphi_X(0)$.

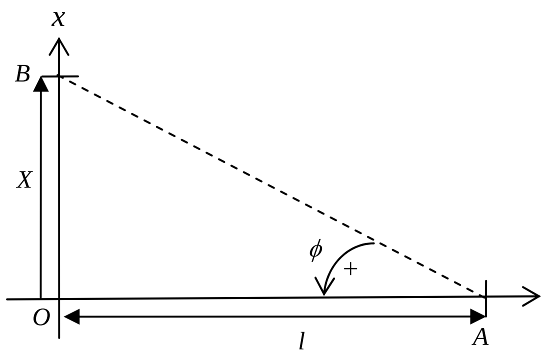


Figure 1 – Illustration du problème

3/ Sous réserve d'existence, rappeler l'expression du moment d'ordre k m_k de la VA X ainsi que l'expression de son écart type σ_X X est maintenant une VA gaussienne, centrée et d'écart type σ .

4/ Expliciter la ddp $f_X(.)$ de la VA X .

Un observateur situé au point A vise un point B de l'axe Ox dont il est situé à une distance l connue. Il déduit l'abscisse X du point B de la mesure de l'angle ϕ défini sur la figure 1. Cet angle est une VA uniformément répartie entre $-\pi/2$ et $+\pi/2$.

5/ Expliciter la ddp $f_\phi(\varphi)$ de la VA ϕ ainsi que sa moyenne m_ϕ et son écart type σ_ϕ .

6/ Après avoir rappelé les résultats concernant le changement de VA scalaires et réelles dans le cas général, démontrer que X est une VA qui suit une loi de Cauchy de paramètre λ et de ddp

$$f_X(x) = \frac{\lambda}{\pi\left(\lambda^2 + x^2\right)}.$$

Préciser l'expression de λ . Tracer l'évolution de cette ddp.

7/ Que peut-on dire de la moyenne de la VA X ainsi que de ses différents moments d'ordre k ?

8/ Expliciter $F_X(x)$, fonction de répartition de la VA X .

9/ On rappelle que la transformée de Fourier (TF) du signal $s(x) = \exp(-|x|)$, x étant scalaire, est $S(\gamma) = \dfrac{2}{1+(2\pi\gamma)^2}$.

Expliciter la fonction caractéristique de la VA X . Conclure.

10/ Montrer que, pour $\alpha \neq 0$, les VA $Y = \alpha X$ et $Z = \dfrac{1}{\alpha X}$ suivent des lois de Cauchy dont on précisera le paramètre caractéristique.

11/ Soient X et Y deux VA indépendantes et suivant une loi de Cauchy de paramètre respectivement α et β . Déterminer la ddp de la VA $S = X + Y$.

12/ Soient X et Y deux VA indépendantes et identiquement distribuées (iid). Montrer que si la VA $S = X + Y$ suit une loi de Cauchy de paramètre λ , X et Y suivent également une loi de Cauchy dont on déterminera le paramètre.

Dans toute la suite de l'exercice, X et Y sont deux VA iid, gaussiennes, centrées et d'écart type σ , et on s'intéresse à la VA $Z = Y/X$. Par plusieurs méthodes, il va être montré que la VA Z suit une loi de Cauchy.

13/ Expliciter la ddp conjointe $f_{XY}(x,y)$ des VA X et Y .

On pose $X = R\cos(\phi)$ et $Y = R\sin(\phi)$ avec $R \geq 0$ et $\phi \in]-\pi,\pi]$.

14/ Après avoir rappelé les résultats concernant le changement de VA vectorielles et réelles dans le cas général, expliciter la ddp conjointe $f_{R\phi}(r,\varphi)$ des VA R et ϕ .

15/ Discuter de l'indépendance des VA R et ϕ . En déduire la ddp marginale $f_\phi(\varphi)$ de la VA ϕ , puis la ddp marginale $f_R(r)$ de la VA R .

16/ Expliciter $F_Z(z)$, fonction de répartition de la VA Z , en fonction de la notion de probabilité en faisant intervenir les VA X et Y .

17/ Représenter dans le plan l'ensemble des couples (X, Y) conduisant à une valeur de $Z = \dfrac{Y}{X} < z$.

18/ En déduire tout d'abord une expression intégrale de $F_Z(z)$ en fonction de $f_\phi(\varphi)$ et en déduire que Z suit une loi de Cauchy dont on précisera le paramètre.

L'expression de $f_Z(z)$ va être retrouvée en considérant le changement de VA suivant : $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Z = Y/X \end{pmatrix}$.

19/ Exprimer tout d'abord $f_{XZ}(x,z)$, ddp du couple aléatoire (X, Z) , en fonction de la ddp du couple (X, Y) . En déduire l'expression de $f_{XZ}(x,z)$.

20/ Exprimer $f_Z(z)$ en fonction de $f_{XZ}(x,z)$ puis retrouver l'expression de $f_Z(z)$.

XII/ ÉLÉMENTS DE CORRECTION DES EXERCICES

Indépendance deux à deux et dans leur ensemble

1/ $Pr[w_i] = p$, $i = 1-4$ et $\sum_i Pr[w_i] = 1 \rightarrow \underline{p = \frac{1}{4} = Pr[w_i]}$
év équiprobables $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $i = 1-4$

2/ • $\underline{Pr[A = \{w_1, w_2\}]} = Pr[w_1 \text{ ou } w_2] \underset{\text{év indépendants}}{=} Pr[w_1] + Pr[w_2] = \underline{\frac{1}{2}}$

• De m, $\underline{Pr[B] = \frac{1}{2}}$ et $\underline{Pr[C] = \frac{1}{2}}$

3/ • $AB = w_2 \rightarrow \underline{Pr[AB] = Pr[w_2] = \frac{1}{4}}$

• De m, $\underline{Pr[AC = w_1] = \frac{1}{4}}$ et $\underline{Pr[B.C = w_3] = \frac{1}{4}}$

4/ • $Pr[A.B] = \frac{1}{4} = Pr[A].Pr[B] \rightarrow$ A et B sont indépendants
• $Pr[A.C] = \frac{1}{4} = Pr[A].Pr[C] \rightarrow$ A et C " "
• $Pr[B.C] = \frac{1}{4} = Pr[B].Pr[C] \rightarrow$ B et C " "

$\rightarrow$ <u>A, B et C sont indépendants deux à deux</u>

5/ $\underline{Pr[A.B.C]} = Pr[\emptyset] = 0 \neq Pr[A].Pr[B].Pr[C] \rightarrow$

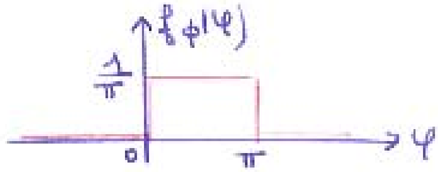
6/ A, B et C <u>ne sont pas indépendants dans leur ensemble</u>

<u>rq:</u> indépendance dans leur ensemble $\Rightarrow$ indépendance 2 à 2

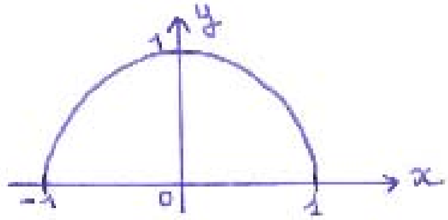
Variables aléatoires

1/ $X^2+Y^2=1$ → les VA X et Y ne sont pas indépendantes.

2/ $f_\phi(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & si\ \varphi \in [0,\pi] \\ 0 & sinon. \end{cases}$



3/



Les points appartiennent au demi-cercle supérieur représenté sur la figure ci-contre et, si le nombre de réalisations est infini, les points sont uniformément répartis le long de ce demi-cercle.

4/ • La répartition des points est symétrique par rapport à l'axe Oy ainsi $m_X = 0$

• $Y \geq 0$ → $m_Y \geq 0$

5/ • $m_X = E[\cos\phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\varphi\, f_\phi(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\varphi\, d\varphi = \frac{1}{\pi} \sin\varphi \Big|_0^\pi = 0 = m_X$

• $\sigma_X^2 = E[(\cos\phi - m_X)^2] = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [1+\cos 2\varphi]\, d\varphi = \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4\pi}\sin 2\varphi \Big|_0^\pi}_{=0}$

→ $\sigma_X = \frac{1}{\sqrt{2}}$

6/ • $m_Y = E[\sin\phi] = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi = \frac{1}{\pi} \cos\varphi \Big|_\pi^0 = \frac{2}{\pi} = m_Y > 0$

• $E[Y^2] = E[\sin^2\phi] = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (1-\cos 2\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2} = E[Y^2]$

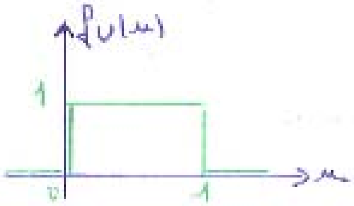
• $\sigma_Y^2 = E[Y^2] - m_Y^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}$ → $\sigma_Y = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}}$

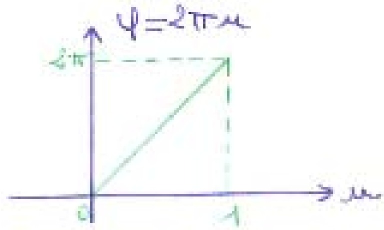
7/ La répartition des points étant symétrique par rapport à l'axe Oy, on peut prévoir que les VA X et Y sont décorrélées. En effet
$E[XY] = E[\cos\phi \sin\phi] = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \sin 2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{4\pi} \cos 2\varphi \Big|_\pi^0 = 0 = E[X]E[Y]$
→ $\rho_{XY} = 0$ et les VA X et Y sont décorrélées.

Changement de variables aléatoires

notation : $f_X(x)$ = ddp de la VA X

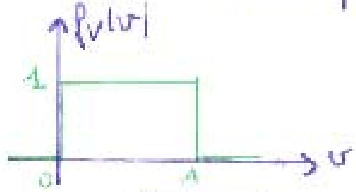
1/





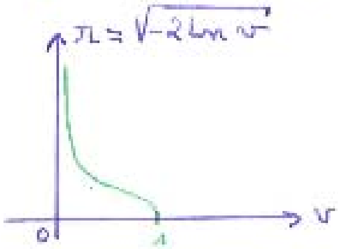
- $U \longrightarrow \Psi = 2\pi U$ → problème de changement de VA avec bijection → résultat général

- $f_\Psi(\psi) = f_U(u) \left|\frac{du}{d\psi}\right| \Big|_{u=\psi/2\pi} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{si } \psi \in]0, 2\pi] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ → VA uniforme sur $]0, 2\pi]$



- $V \longrightarrow R = \sqrt{-2 \ln V}$
  $v \longrightarrow r = \sqrt{-2 \ln v}$ → $\frac{dr}{dv} = -\frac{1}{v\sqrt{-2 \ln v}}$

  → bijection



- $f_R(r) = f_V(v) \left|\frac{dv}{dr}\right| \Big|_{v = e^{-r^2/2}}$

  $= \begin{cases} r\, e^{-r^2/2} & \text{si } r \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ → loi de Rayleigh

- U et V indépendants → R et Ψ indépendants →
  ddp conjointe R et Ψ $= f_{R\Psi}(r,\psi) = f_R(r)\, f_\Psi(\psi)$

  $= \begin{cases} \frac{r}{2\pi} e^{-r^2/2} & \text{si } r \geq 0 \text{ et } \psi \in]0, 2\pi] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2/ $\begin{pmatrix} R \\ \Psi \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} bR\cos\psi \\ dR\sin\psi \end{pmatrix}$ avec $r \geq 0$ et $\psi \in]0, 2\pi]$ → bijection →

- $f_{XY}(x,y) = f_{R\Psi}(r,\psi) \frac{1}{|J|} \Big|_{r = \sqrt{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2 + \left(\frac{y-c}{d}\right)^2}}$

  $\underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2\pi |b||d|} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-a)^2}{b^2} + \frac{(y-c)^2}{d^2}\right]\right)$

  $J = \begin{pmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial \psi \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\cos\psi & -br\sin\psi \\ d\sin\psi & dr\cos\psi \end{pmatrix}$ → $|J| = |bd|\, r$ si $r \geq 0$

  $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,|b|} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{b^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,|d|} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y-c)^2}{d^2}\right)$

→ X et Y indépendants et $\begin{cases} X : \mathcal{N}(a, b^2) \\ Y : \mathcal{N}(c, d^2) \end{cases}$

3/ d'où $m_X = a$ et $\sigma_X = |b|$ → $b = \pm\, \sigma_X$

Variables aléatoires indépendantes

1/ $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\, dx$

2/ $f_{X/Y=y}(x) = \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$

3/. Les transformations considérées correspondent à des changements de VA qui sont des bijections

- rappel changement VA $\in \mathbb{R}^n$: $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \longrightarrow Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = g(X)$

$$f_Y(y) = f_{Y_1 \dots Y_n}(y_1, \dots, y_n) = f_X(x)\, |J| \Big|_{x/\, g(x)=y}$$
$$= f_X(x) \frac{1}{|K|} \Big|_{x/\, g(x)=y}$$
$$= \sum_k f_X(x)\, |J| /_{x = x_k /\, g(x_k) = y}$$

avec
- $J = \dfrac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(y_1, \dots, y_n)}$, $J_{ij} = \dfrac{\partial x_i}{\partial y_j}$ et $|J| = |\det J|$
- $K = \dfrac{D(y_1, \dots, y_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}$

- application : $Y \to Z_0 = x_0 + Y = g(Y)$

$\to J = 1$

$\to f_{Z_0}(z_0) = f_Y(z_0 - x_0)$

4/ • application : $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} X \\ Z = X+Y \end{pmatrix} = g(X,Y) \quad \to Y = Z - X$

$\to J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $|J| = 1$

$\to f_{XZ}(x,z) = f_{XY}(x, z-x)$

- $f_{Z/X=x_0}(z) \underset{2/}{\overset{=}{\uparrow}} \dfrac{f_{XZ}(x_0,z)}{f_X(x_0)} = \dfrac{f_{XY}(x_0, z-x_0)}{f_X(x_0)} \overset{=}{\uparrow} f_Y(z - x_0) \to$

+ VA X et Y indépendantes $\Leftrightarrow$
$f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$

$f_{Z/X=x_0}(z) = f_{Z_0}(z)$

c-à-d $Z_0 = Z/X = x_0$
si X et Y sont indépendantes

Variables aléatoires mixtes

1/ VA X : $\begin{cases} 1 \to p \\ -1 \to 1-p \end{cases}$ • valeur moyenne $= m_X = 1 \times p + (-1) \times (1-p) = 2p-1$

• variance $= 1^2 \times p + (-1)^2 (1-p) - m_X^2 = v_X$

$= 4p(1-p)$

ou $v_X = (1-(2p-1))^2 p + (-1-(2p-1))^2 (1-p)$.

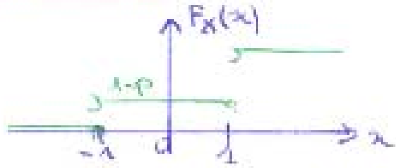
• $\varphi_X(u) =$ fonction caractéristique $= E[e^{juX}] = e^{ju\,1} p + e^{ju(-1)}(1-p)$

$= e^{ju} p + e^{-ju}(1-p) = e^{-ju} + 2j \sin u \; p$

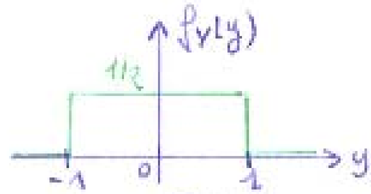
• fonction caractéristique $= F_X(x) = \Pr[X<x]$

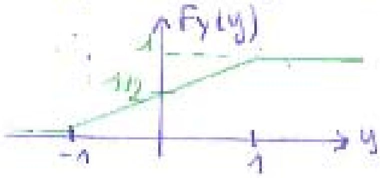
• ddp $= f_X(x) = \dfrac{dF_X(x)}{dx}$

$= (1-p)\,\delta(x+1) + p\,\delta(x-1)$



2/





• $F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(x)\,dx$

• $m_Y = E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)\,dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} y\,dy = 0 = m_Y$

impaire

→ VA centrée

• $\varphi_Y(u) = E[e^{juY}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{juy} f_Y(y)\,dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{juy}\,dy$

$= \dfrac{\sin u}{u}$

3/ • $F_Z(z) = \Pr[Z<z] = \Pr[X+Y<z] = \Pr[(1+Y<z$ et $X=1)$ ou $(-1+Y<z$ et $X=-1)]$

$= \Pr[Y<z-1$ et $X=1] + \Pr[Y<z+1$ et $X=-1]$

événements disjoints

$= \Pr[Y<z-1]\,\Pr[X=1] + \Pr[Y<z+1]\,\Pr[X=-1]$

X et Y indépendant

$= F_Y(z-1)\,p + F_Y(z+1)(1-p)$

• $f_Z(z) = \dfrac{dF_Z(z)}{dz} = \dfrac{dF_Y(y)}{dy}\dfrac{dy}{dz}\Big|_{y=z-1} p + \dfrac{dF_Y(y)}{dy}\dfrac{dy}{dz}\Big|_{y=z+1}(1-p)$

$= f_Y(z-1)\,p + f_Y(z+1)(1-p)$

4/ • $F_W(w) = \Pr[W<w] = \Pr[XY<w] = \Pr[(Y<w$ et $X=1)$ ou $(-Y<w$ et $X=-1)]$

$= \Pr[Y<w]\,p + \underbrace{\Pr[Y>-w]}_{1-\Pr[Y\le -w] \,=\, 1-F_Y(-w) \text{ (VA continue)}}(1-p)$

$= F_Y(w)\,p + (1-F_Y(-w))(1-p)$

• $f_W(w) = f_Y(w)\,p + f_Y(-w)(1-p)$

5/ $f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\dfrac{y^2}{2\sigma^2}\right) = f_Y(-y) \to f_W(w) = f_Y(w) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\dfrac{w^2}{2\sigma^2}\right)$

$W : \mathcal{N}(0,\sigma^2)$

Variables aléatoires

1/ $X : \mathcal{N}(m,\sigma^2) \to f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right)$

2/ $f_{XY}(x,y) \overset{\text{VA indépendantes}}{=} f_X(x)\, f_Y(y) \underset{\mathcal{N}(0,\sigma^2)}{=} \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}\right)$

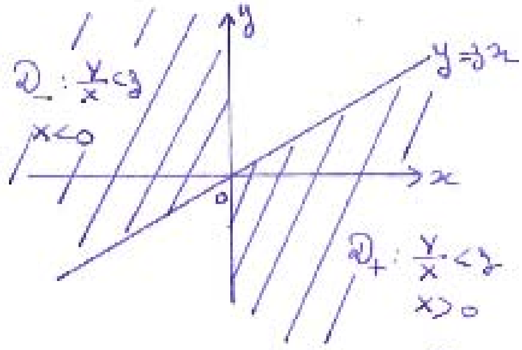
3/ $f_Z(z) = f_{XY}(z_x, z_y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{z^T z}{\sigma^2}\right)$

4/ $m_Z = E[Z] = 0$. VA centrées $\quad \sigma_Z^2 = E[\|Z\|^2] = E[X^2+Y^2] = 2\sigma^2 \Rightarrow \sigma_Z = \sqrt{2}\,\sigma$

5/ $f_Z(z) = f_{XY}(x,y) = \frac{1}{\pi\sigma_Z^2}\exp\left(-\frac{\|z\|^2}{\sigma_Z^2}\right)$

6/ $F_Z(z) = P_r\left[Z = \frac{Y}{X} < z\right]$

7/



$\frac{Y}{X} < z$: $X>0 \quad Y < zX \to D_+$; $X<0 \quad Y > zX \to D_-$

8/ $F_Z(z) = P_r[(X,Y) \in D_+ \cup D_-]$

$\overset{\text{symétrie}}{=} 2\, P_r[(X,Y) \in D_+]$

$= 2\int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{zx} f_{XY}(x,y)\,dy\right)dx$

9/ $f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz}$

10/ $f_Z(z) = 2\int_0^{+\infty} x\, f_{XY}(x,zx)\,dx$

$\underset{\mathcal{N}(0,1)}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} x\exp\left(-\frac{1}{2}(1+z^2)x^2\right)dx$

$= \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+z^2}\, e^{-\frac{1}{2}(1+z^2)x^2}\Big|_{+\infty}^{0}$

$= \frac{1}{\pi(1+z^2)} = f_Z(z)$

11/ $\int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(z)\,dz \overset{\text{symétrie}}{=} 2\int_0^{+\infty}\frac{1}{\pi(1+z^2)}\,dz = \frac{2}{\pi}\,\text{Arctg}\Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = 1$

12/ $z f_Z(z)$ ne conduit pas à une intégrale qui converge en $\pm\infty$ $\left(\propto \frac{1}{z}\right)$
$\to E[Z] \nexists$

13/ $J \underset{y=zx}{=} \frac{D(x,y)}{D(x,z)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & x \end{pmatrix} \qquad f_{XZ}(x,z) = f_{XY}(x,zx)\,|x|$

14/ $f_{XZ}(x,z) = \frac{|x|}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}(1+z^2)x^2\right)$

15/ $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XZ}(x,z)\,dx = \frac{2}{2\pi}\int_0^{+\infty} x\, e^{-\frac{1}{2}(1+z^2)x^2}\,dx = \frac{1}{\pi(1+z^2)}$

16/

Variables aléatoires gaussiennes

1re partie

X VA réduite $\rightarrow m_X = 0, \sigma_X = 1$ $\Big\}$ $\rightarrow X : \mathcal{N}(0,1)$
X VA $\mathcal{N}$

1/ $f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$

2/ $\varphi_X(u) = E[e^{juX}] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, e^{jux}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} e^{jux}\, dx$

$\underset{\uparrow}{=} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\theta^2} e^{j\sqrt{2\pi}\, u\theta}\, d\theta = F\left(V = -\frac{u}{\sqrt{2\pi}}\right) = e^{-\frac{u^2}{2}} = \varphi_X(u)$

$x = \sqrt{2\pi}\,\theta$

3/ $m_Y = E[Y = aX + b] \overset{\text{linéarité}}{=} a\, m_X + b \overset{X\text{ : VA centrée}}{=} b = m_Y$

$\sigma_Y^2 = E[(Y - m_Y)^2] = E[a^2 X^2] \underset{\uparrow}{=} a^2 \rightarrow \sigma_Y = |a|$

X : VA réduite

4/ • $f_Y(y) = f_X(x) \left|\dfrac{dx}{dy}\right| \Big|_{x = \frac{y-b}{a}} = \dfrac{1}{|a|} f_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right)$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_Y} \exp\left(-\dfrac{(y - m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right) \quad : \mathcal{N}(m_Y, \sigma_Y^2)$

• $\varphi_Y(u) = E[e^{juY} = e^{ju(aX+b)}] \underset{b = m_Y}{=} e^{ju m_Y} E[e^{juaX}] = e^{ju m_Y} \varphi_X(ua)$

$= e^{ju m_Y} e^{-\sigma_Y^2 \frac{u^2}{2}}$

2e partie

5/ • $f_{X_i}(x_i) \overset{X_i : \mathcal{N}(0,1)}{=} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_i^2}{2}} \quad \forall i = 1 - m$

• $f_{X_1 \dots X_m}(x_1, \dots, x_m) \underset{\uparrow}{=} \displaystyle\prod_{i=1}^{m} f_{X_i}(x_i) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^m} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right)$

VA indépendantes dans leur ensemble

6/ $f_X(x) = f_{X_1 \dots X_m}(x_1, \dots, x_m) = \dfrac{1}{(2\pi)^{m/2}} \exp\left(-\dfrac{1}{2} x^T x\right)$

7/ $\varphi_X(u) = E[e^{ju^T X}] = E\left[\exp\left(j \displaystyle\sum_{i=1}^{m} u_i X_i\right) = \prod_{i=1}^{m} e^{j u_i X_i}\right]$

$\underset{\uparrow}{=} \displaystyle\prod_{i=1}^{m} E[e^{j u_i X_i}] = \prod_{i=1}^{m} \varphi_{X_i}(u_i) = \prod_{i=1}^{m} e^{-\frac{u_i^2}{2}} = e^{-\frac{u^T u}{2}} = \varphi_X(u)$

VA X_i indépendantes dans leur ensemble

8/ • $m_Y = E[Y = AX + B] = A\, m_X + B \underset{\uparrow}{=} B = m_Y$

X_i = VA centrée $\rightarrow X$ VA centrée

• $C_{YY} = E[(Y - m_Y)(Y - m_Y)^T] = E[A X X^T A^T] = A\, E[X X^T]\, A^T$

$\underset{\uparrow}{=} A\, C_{XX}\, A^T = A A^T = C_{YY}$

X_i VA indépendantes et réduites $\rightarrow E[X_i X_j] = \delta_{ij} \rightarrow C_{XX} = I$

9/ $f_Y(y) = f_X(x) \left| \frac{D(x_1,\dots,x_n)}{D(y_1,\dots,y_n)} \right| \Big|_{x = A^{-1}(y-B)} = \frac{1}{|\det A|} f_X(A^{-1}(y-B))$

$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\det A|} \exp\left(-\frac{1}{2} (y-B)^T A^{-1T} A^{-1}(y-B)\right)$

$\underset{\uparrow}{=} \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det C_{YY}}} \exp\left(-\frac{1}{2} (y-m_Y)^T C_{YY}^{-1} (y-m_Y)\right) = f_Y(y)$

$B = m_Y \qquad A A^T = C_{YY} \to A^{T-1} A^{-1} = C_{YY}^{-1}$

$\hookrightarrow (\det A)^2 = \det C_{YY}$

10/ $\varphi_Y(u) = E[\exp(j u^T Y)] = \exp(j u^T (AX+B))] = \exp(j u^T m_Y) E[\exp(j u^T AX)]$

$= \exp(j u^T m_Y) \varphi_X(A^T u) = \exp(j u^T m_Y) \exp(-\frac{1}{2} u^T A A^T u)$

$= \exp(j u^T m_Y) \exp(-\frac{1}{2} u^T C_{YY} u) = \varphi_Y(u)$

3e partie

11/ $C_{XX} = E[(X-m_X)(X-m_X)^T]$

12/ $X_i = \sum_{j=1}^{n} u_j X_j$ avec $u_j = \delta_{j-i} \to X_i : \mathcal{N}$

13/ • $m_Y = E[Y = u^T X] = u^T m_X = m_Y$

• $\sigma_Y^2 = E[(Y-m_Y)^2] = E[(u^T (X-m_X))^2 = u^T (X-m_X)(X-m_X)^T u]$

$= u^T C_{XX} u = \sigma_Y^2$

14/ $\varphi_Y(t) = E[\exp(j t Y) = \exp(j t u^T X)] = \varphi_X(t u) = \varphi_Y(t)$

15/ • $Y : \mathcal{N}(m_Y = u^T m_X, \sigma_Y^2 = u^T C_{XX} u) \to 4/$

$\varphi_Y(t) = \exp(j t m_Y) \exp\left(-\frac{\sigma_Y^2 t^2}{2}\right)$ + $m_Y = u^T m_X$ et $\sigma_Y^2 = u^T C_{XX} u$

• $\varphi_Y(1) = \exp(j u^T m_X) \exp\left(-\frac{u^T C_{XX} u}{2}\right) = \varphi_X(u)$

16/ D'après 9/ 10/ $f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det C_{XX}}} \exp\left(-\frac{1}{2} (x-m_X)^T C_{XX}^{-1} (x-m_X)\right)$

$\to X : \mathcal{N}(m_X, C_{XX})$. Ainsi si $Y = u^T X$ $\mathcal{N}$ $\forall u \to X$ $\mathcal{N}$

17/ Les VA X_i sont décorrélées $\to C_{XX} = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2) \to$

$C_{XX}^{-1} = \mathrm{diag}(\sigma_1^{-2}, \dots, \sigma_n^{-2})$ et $\sqrt{\det C_{XX}} = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \to$

$f_X(x) = \frac{1}{[\sqrt{2\pi}]^n \sigma_1 \dots \sigma_n} \exp -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) \to$.

les VA sont indépendantes dans leur ensemble $\to$

dans ces VA $\mathcal{N}$ indépendance $\Leftrightarrow$ non corrélation

18/ $\varphi_Y(t) = \varphi_X(tu) \overset{X\,\mathcal{N}(m_X, C_{XX})}{=} \exp(j t u^T m_X) \exp\left(-\frac{u^T C_{XX} u \, t^2}{2}\right)$

$\to Y$ $\mathcal{N}(m_Y = u^T m_X, \sigma_Y^2 = \frac{u^T C_{XX} u}{2}) \to X \mathcal{N} \Leftrightarrow Y \mathcal{N} \forall u$

Somme de variables aléatoires gaussiennes

1/ • $\left.\begin{matrix}X\\Y\end{matrix}\right]$ $\mathcal{N}(0,1)$ $\Rightarrow$ $f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ et $f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$

• X et Y indépendants $\Leftrightarrow$ $f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) = \dfrac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$

2/ • indépendance $\Rightarrow$ non corrélation $\rightarrow$ les VA X et Y sont décorrélées

En effet, $\rho_{XY} = \dfrac{E[(X-m_X)(Y-m_Y)]}{\sigma_X\sigma_Y} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{VA indépendantes}}}{=} \dfrac{E[X-m_X]\,E[Y-m_Y]}{\sigma_X\sigma_Y} = 0$

3/ • $m_U = E[U = sX + tY] = s\,m_X + t\,m_Y \underset{\substack{\uparrow\\ X,Y \text{ centrées}}}{=} 0 = m_U$

$m_V = E[V = tX - sY] = t\,m_X - s\,m_Y \underset{\downarrow}{=} 0 = m_V$

• $\sigma_U^2 = E[(U-m_U)^2] = E[U^2 = s^2X^2 + t^2Y^2 + 2st\,XY]$

$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{linéarité}}}{=} s^2 \underbrace{E[X^2]}_{=1} + t^2 \underbrace{E[Y^2]}_{=1} + 2st \underbrace{E[XY]}_{=0} = s^2+t^2 = 1 = \sigma_U^2$

VA réduites — $=0$ VA indépendantes et centrées

• de m $\sigma_V^2 = 1$

• $\mathrm{cov}(U,V) = E[(U-m_U)(V-m_V)] \underset{\substack{\uparrow\\ \text{VA centrée}}}{=} E[UV] = E[st(X^2-Y^2) + (t^2-s^2)XY]$

$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{VA réduite et indépendantes}}}{=} 0$ $\rightarrow$ U et V décorrélées

4/ • $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ $\mathcal{N}$ $\Leftrightarrow$ X et Y $\mathcal{N}$ dans leur ensemble $\rightarrow$ U et V $\mathcal{N}$ $\rightarrow$

U et V $\mathcal{N}(0,1)$

• U et V décorrélées $\Leftrightarrow$ indépendantes car VA $\mathcal{N}$ $\rightarrow$

$f_{UV}(u,v) = \dfrac{1}{2\pi} \exp\left(-\dfrac{1}{2}(u^2+v^2)\right)$

5/ • X, Y et Z $\mathcal{N}$ dans leur ensemble $\rightarrow$ W $\mathcal{N}$

• X, Y et Z centrées et de matrice de covariance = I

$\rightarrow$ X et Y et Z VA réduites et décorrélées $\rightarrow \sigma_W^2 = 3$
$\rightarrow m_W = 0$

$\rightarrow$ W : $\mathcal{N}(0,3)$ $\quad f_W(w) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{3}} \exp\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{w^2}{3}\right)$

6/ • W, X−Y, Y−Z, Z−X VA $\mathcal{N}$ centrées

X et Y VA réduites

• $E[W(X-Y) = (X+Y+Z)(X-Y)] \underset{\substack{\uparrow\\ X,Y \text{ et } Z \text{ centrées et décorrélées}}}{=} E[X^2-Y^2] \underset{\downarrow}{=} 0 = E[W(X-Y)]$

$\rightarrow$ W et (X−Y) sont décorrélées. Or ce sont des VA $\mathcal{N}$

$\Rightarrow$ W et (X−Y) sont indépendantes. De m pour Y−Z et Z−X

1/ • $g(x,y)$ est une ddp ssi $\iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\,dx\,dy = 1$ et $g(x,y) \geq 0\ \forall x$ et y

• or $g(x,y) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ddp } \mathcal{N}}}{h(x,y)} - f(x)\,f(y)$ $\rightarrow \iint_{\mathbb{R}^2} h(x,y)\,dx\,dy = 1$

$\rightarrow \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\,dx\,dy = 1 \iff \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 0$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2a\left(\frac{x^3}{3} - bx\right)\Big|_0^3 = 2a(9-3b) \rightarrow b = 3$

• $g(x,y) \geq 0 \iff \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \geq a^2(x^2-3)(y^2-3)$ $\forall |x| \leq 3$ et $|y| \leq 3$

$\rightarrow$ CS : $\underset{\text{sur } [-3,3]}{\min}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right| \geq |a| \underset{\text{sur } [-3,3]}{\max}|x^2-3|$

$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-9/2} \geq |a|\,6 \rightarrow |a| \leq \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-9/2}$

2/ • $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy}_{=1} - f(x) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy}_{=0}$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \rightarrow X : \mathcal{N}(0,1)$

de m, $Y : \mathcal{N}(0,1)$

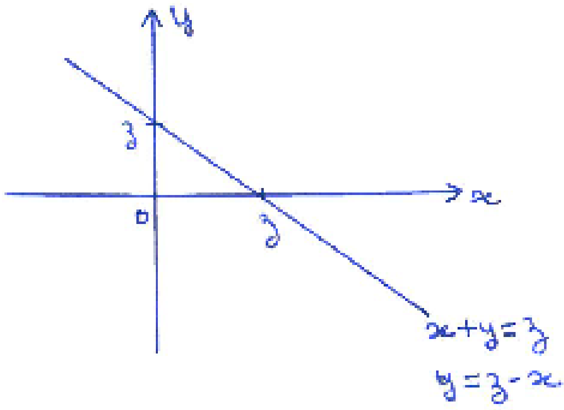
• X et Y $\mathcal{N}$, cependant $\binom{X}{Y}$ n'est pas une VA $\mathcal{N}$ (sauf si $a = 0$) $\rightarrow$ X et Y ne sont pas $\mathcal{N}$ dans leur ensemble

3/ • $f_{XY}(x,y) = g(x,y) \neq f_X(x)\,f_Y(y) \rightarrow$ les VA X et Y ne sont pas indépendantes

• $E[(X-m_X)(Y-m_Y)] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{VA centrées}}}{=} E[XY] = \underbrace{\iint_{\mathbb{R}^2} xy\,h(x,y)\,dx\,dy}_{=0} - \Big(\underbrace{a\int_{-3}^{3} x(x^2-3)\,dx}_{=0\ |\text{impair}}\Big)^2$

$\rightarrow$ X et Y sont décorrélées, cependant les VA ne sont pas indépendantes $\rightarrow$ X et Y ne sont pas $\mathcal{N}$ dans leur ensemble

4/ • $Z = X+Y$ (cf TD)



• $F_Z(z) = \Pr[Z = X+Y < z]$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{z-x} g(x,y)\,dy\right)dx$$

• $f_Z(z) = \dfrac{dF_Z(z)}{dz}$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, z-x)\,dx$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(x, z-x)\,dx}_{\substack{\text{ddp } \mathcal{N}\\ \text{(somme VA } \mathcal{N}\\ \text{dans leur ensemble)}}} - \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(x)\,f(z-x)}_{\substack{=\text{ polynôme sur un}\\ \text{domaine donné}}}\,dx$$

→ $f_Z(z) \neq$ ddp $\mathcal{N}$ ⇒ $Z = X+Y$ n'est pas un VA $\mathcal{N}$

→ X et Y ne sont pas gaussiennes dans leur ensemble

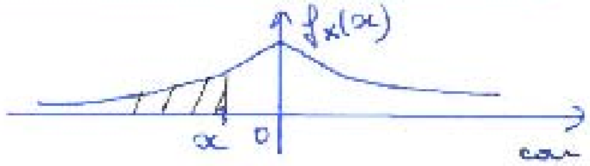
→ $\binom{X}{Y}$ n'est pas un VA $\mathcal{N}$.

Variables aléatoires gaussiennes - Contre-exemple 2

1/ $F_X(x) = \Pr[X < x] = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\, d\alpha$

2/ $\varphi_X(u) = E\left[e^{juX}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jux} f_X(x)\,dx$

3/



$\boxed{///} = F_X(x)$

car $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

D'après les symétries $F_X(-x) \stackrel{\downarrow}{=} 1 - F_X(x)$ ou $F_X(x) = 1 - F_X(-x)$

4/ $F_Y(y) = \Pr[Y < y] = \Pr[\varepsilon X < y]$

$= \Pr[X < y \text{ et } \varepsilon = 1 \text{ ou } X > -y \text{ et } \varepsilon = -1]$

$\underset{\uparrow}{=} \Pr[X < y \text{ et } \varepsilon = 1] + \Pr[X > -y \text{ et } \varepsilon = -1]$.

év indépendants

$\stackrel{\downarrow}{=} \underbrace{\Pr[X<y]}_{=F_X(y)} \underbrace{\Pr[\varepsilon = 1]}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\Pr[X > -y]}_{= 1 - \Pr[X \leq -y]} \underbrace{\Pr[\varepsilon = -1]}_{=\frac{1}{2}}$

$\underset{\uparrow}{=} 1 - \Pr[X < -y]$

X VA continue

$= 1 - F_X(-y) = F_X(y)$

$\rightarrow F_Y(y) = F_X(y)$ or X $\mathcal{N}(0,1) \Rightarrow Y : \mathcal{N}(0,1)$

rq : . $m_Y = E[Y = \varepsilon X] = E[\varepsilon]\, m_X \underset{\uparrow}{=} 0$

X et ε centrées

. $\sigma_Y^2 = E[Y^2 = \varepsilon^2 X^2 = X^2] = 1$

5/ $Z = X + Y = (1+\varepsilon) Y = \begin{vmatrix} 0 \\ 2Y \end{vmatrix}$ $\rightarrow$ VA mixte

$\rightarrow$ Z ne peut pas être $\mathcal{N}$

6/ $\varphi_Z(u) = E[\exp(ju Z)] = \exp(ju(1+\varepsilon) X]$

$= E_\varepsilon\left[E_{X/\varepsilon}\left[e^{ju(1+\varepsilon)X}\right]\right] = E_\varepsilon\left[\varphi_X(u(1+\varepsilon))\right]$ (X,Y) non $\mathcal{N}$

$= E_\varepsilon\left[e^{-u^2(1+\varepsilon)^2}\right] \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\left(1 + e^{-2u^2}\right) \rightarrow$ Z n'est pas $\mathcal{N}$

VA discrète ± 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$

7/ $\varphi_{XY}(u,v) = E\left[e^{j(uX+vY)}\right] = E\left[e^{j(u+\varepsilon v)X}\right]$

$= E_\varepsilon\left[E_{X/\varepsilon}\left[e^{j(u+\varepsilon v)X}\right]\right] = E_\varepsilon\left[\varphi_X(u+\varepsilon v)\right]$

$= E_\varepsilon\left[e^{-\frac{(u+\varepsilon v)^2}{2}}\right] \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\left[e^{-\frac{(u-v)^2}{2}} + e^{-\frac{(u+v)^2}{2}}\right]$

VA discrète

$\rightarrow (X,Y)$ n'est pas $\mathcal{N}$

Variables aléatoires : Loi de Cauchy

1/ $F_X(x) = \Pr[X < x] = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\, d\alpha$

2/ $\varphi_X(u) = E[e^{iuX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} f_X(x)\, dx \rightarrow \varphi_X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1 = \varphi_X(0)$

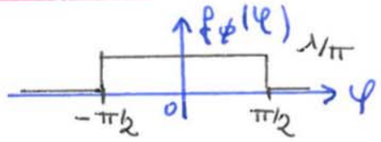
$|\varphi_X(u)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx \longrightarrow$ convergence en $|\,| \Rightarrow \varphi_X(u)\ \exists$ et $|\varphi_X(u)| \leq \varphi_X(0) = 1$
$\forall$ VA

3/ $m_k = E[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x)\, dx$, sous réserve $\exists$ $\quad m_X = m_1$ $\quad m_0 = 1$

$\sigma_X^2 = E[|X - m_X|^2] = E[X^2] - m_X^2$

4/ $X : \mathcal{N}(0, \sigma_X^2) \longrightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_X} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma_X^2}}$

5/ $f_\phi(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{si } |\varphi| \leq \pi/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



$m_\phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi f_\phi(\varphi)\, d\varphi = 0 = m_\phi$

fonction impaire, bornée et à support borné

$\sigma_\phi^2 = E[\phi^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2 f_\phi(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi^2\, d\varphi = \frac{2}{3\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = \frac{\pi^2}{12} \rightarrow \sigma_\phi = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

6/ $X \longrightarrow Y = g(X)$

$f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|\Big|_{x/\, g(x) = y} = f_X(x)\frac{1}{\left|\frac{dy}{dx}\right|}\Big|_{x/\, g(x)=y}$

$= \sum_i f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|\Big|_{x = x_i /\, g(x_i) = y}$

$X = \ell\, \mathrm{tg}\, \phi \longrightarrow \frac{dx}{d\varphi} = \ell(1 + \mathrm{tg}^2\varphi) = \frac{\ell^2 + x^2}{\ell} \longrightarrow$

$f_X(x) = \frac{\ell}{\pi(\ell^2 + x^2)}$: loi de Cauchy de paramètre $\lambda = \ell$

7/ $m_k = \frac{\ell}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^k}{\ell^2 + x^2}\, dx \Rightarrow$ décroissance en x^{k-2} en $\pm\infty$
$\Rightarrow m_k \not\exists \quad \forall k > 0 \rightarrow m_X \not\exists$

8/ $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\ell}{\pi}\frac{1}{\ell^2 + \alpha^2}\, d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1 + (\alpha/\ell)^2}\, d\alpha/\ell = \frac{1}{\pi}\, \mathrm{artg}\left(\frac{\alpha}{\ell}\right)\Big|_{-\infty}^{x}$

$= \frac{1}{\pi}\left(\mathrm{artg}\,\frac{x}{\ell} + \frac{\pi}{2}\right) = F_X(x)$

9/ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1 + (2\pi\nu)^2} e^{+j2\pi\nu x}\, d\nu = e^{-|x|}$ d'après le rappel

$\varphi_X(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ell}{\pi(\ell^2 + x^2)} e^{+jux}\, dx \underset{x = 2\pi\theta\ell}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1 + (2\pi\theta)^2} e^{+ju2\pi\ell\theta}\, d\theta$

$= e^{-\ell|u|} = \varphi_X(u)$

$\varphi_X(u)$ $\exists$ toujours alors que $m_k \not\exists$, y compris $m_1 = m_X$

10/ • $\underline{Y = \alpha X}$ – $\varphi_Y(u) = E[e^{ju\alpha X}] = \varphi_X(u\alpha) = e^{-\rho|\alpha||u|} \rightarrow$

$\underline{Y \text{ suit une loi de Cauchy de paramètre } \rho|\alpha|}$

ou – $\dfrac{dy}{dx} = \alpha$ $\quad f_Y(y) = \dfrac{\rho}{\pi|\alpha|\left(\rho^2 + \frac{y^2}{\alpha^2}\right)} = \dfrac{\rho|\alpha|}{\pi(\rho^2\alpha^2 + y^2)}$

• $\underline{Z = \dfrac{1}{\alpha X}}$ $\quad \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{1}{x^2} = \alpha z^2$

$f_Z(z) = \dfrac{1}{\pi\rho|\alpha|\left(\frac{1}{\rho^2\alpha^2} + z^2\right)} \rightarrow$ $\underline{\text{loi de Cauchy de paramètre } \dfrac{1}{\rho|\alpha|}}$.

11/ $\varphi_S(u) = E[e^{ju(X+Y)}] \underset{\uparrow}{=} E[e^{juX}]\,E[e^{juY}] = e^{-(\alpha+\beta)|u|} \rightarrow$

VA indépendantes $\qquad$ $\underline{S : \text{loi de Cauchy de paramètre } (\alpha+\beta)}$

12/ $\varphi_S(u) \underset{\uparrow}{=} \varphi_X(u)\,\varphi_Y(u) \underset{\uparrow}{=} (\varphi_X(u))^2 = e^{-d|u|}$

VA indépendantes $\quad$ identiques

$\rightarrow \varphi_X(u) = \pm e^{-d/2|u|}$ or $\varphi_X(0) = 1 \rightarrow \varphi_X(u)\, e^{-d/2|u|} \rightarrow$

$\underline{X \text{ et } Y \text{ suivent une loi de Cauchy de paramètre } d/2}$

13/ $f_{XY}(x,y) \underset{\uparrow}{=} f_X(x)\,f_Y(y) \underset{\uparrow}{=} \underline{\dfrac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{x^2+y^2}{\sigma^2}\right) = f_{XY}(x,y)}$

VA indépendantes $\quad \mathcal{N}(0,\sigma^2)$

14/ • $X \longrightarrow Y = g(X)$ $\quad f_Y(y) = f_X(x)\,|J|\,\Big|_{x/g(x)=y} = f_X(x)\dfrac{1}{|K|}\Big|_{x/g(x)=y}$

avec $|J| = |\text{dét } J|$ et $J_{ij} = \dfrac{\partial x_i}{\partial y_j}$

$|K| = |\text{dét} K|$ et $K_{ij} = \dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}$

• $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R \\ \phi \end{pmatrix}$ avec $\left|\begin{array}{l} X = R\cos\phi \text{ et } Y = R\sin\phi \\ R \geq 0 \text{ et } \phi \in]-\pi,\pi] \end{array}\right.$

$J = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \rightarrow |\text{dét } J| = r$

$f_{R\phi}(r,\varphi) = \left|\begin{array}{l} \dfrac{r}{2\pi\sigma^2}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{r^2}{\sigma^2}} \text{ si } r \geq 0 \text{ et } \varphi \in]-\pi,\pi] \\ 0 \text{ sinon} \end{array}\right.$

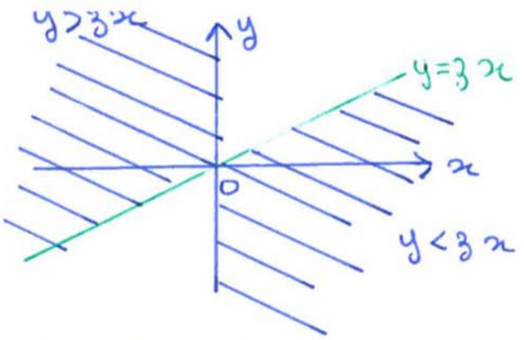
15/ $f_{R\phi}(r,\varphi) = g_R(r)\,g_\phi(\varphi)$ c-à-d $\underline{\text{fonction séparable}}$ de r et ϕ

$\rightarrow$ $\underline{\text{les VA } R \text{ et } \phi \text{ sont indépendantes}}$

$\rightarrow \left|\begin{array}{l} f_R(r) = \left|\begin{array}{l} \dfrac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{r^2}{\sigma^2}\right) \text{ si } r \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{array}\right. \\ f_\phi(\varphi) = \left|\begin{array}{l} \dfrac{1}{2\pi} \text{ si } \varphi \in]-\pi,\pi] \\ 0 \text{ sinon} \end{array}\right. \end{array}\right.$

16/ $F_Z(z) = \Pr\left[\dfrac{Y}{X} < z\right] = \Pr[Y < zX \text{ et } X \geq 0] + \Pr[Y > zX \text{ et } X \leq 0]$

17/



▨ = domaine tel que $\frac{y}{x} < 3$ $= \mathcal{D}_3$

18/ $F_Z(3) = \Pr[(X,Y) \in \mathcal{D}_3] = \Pr[\phi / (X,Y) \in \mathcal{D}_3] \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\pi}\left(\arctan 3 + \frac{\pi}{2}\right) = F_Z(3)$

ϕ VA uniformément répartie

→ Z suit loi de Cauchy de paramètre $\lambda = 1$

19/ $f_{XZ}(x,y) = f_{XY}(x,y) \frac{1}{|K|}\Big|_{x,\, y = 3x}$ $\quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$ $\quad |K| = \frac{1}{|x|}$

$= \frac{|x|}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(1+3^2)x^2}{\sigma^2}\right)$

20/ $f_Z(3) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XZ}(x,3)\, dx = \frac{1}{\pi\sigma^2} \int_0^{+\infty} x\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(1+3^2)x^2}{\sigma^2}} dx$

$= \frac{1}{\pi(1+3^2)} \; e^{-\frac{1}{2}\frac{(1+3^2)^2 x^2}{\sigma^2}} \Big|_0^{+\infty}$

$= \frac{1}{\pi(1+3^2)} = f_Z(3)$ → loi de Cauchy de paramètre $\lambda = 1$

SIGNAUX ALÉATOIRES

I/ SIGNAUX ALÉATOIRES

1/ Rappeler la définition d'un signal aléatoire (SA) stationnaire au sens strict.
2/ Rappeler la définition d'un SA stationnaire au sens large.

Soit $x(t)$ un SA centré, scalaire, réel, stationnaire au sens strict, de fonction d'autocorrélation $\gamma_{xx}(\tau)$, de puissance finie et de densité spectrale de puissance (dsp) $\Gamma_{xx}(f)$.

3/ Expliciter $\mathrm{E}[x(t)]$.
4/ Rappeler la définition de $\gamma_{xx}(\tau)$ puis celle de $\Gamma_{xx}(f)$.
5/ Exprimer la puissance d'un SA stationnaire en fonction de sa corrélation puis en fonction de sa dsp.

On considère le SA $y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$ où f_0 est une fréquence certaine.

6/ Expliciter la fonction d'autocorrélation du SA $y(t)$.
7/ Ce SA est-il stationnaire au sens large ?
On considère le SA $z(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t) + j\, x(t)\sin(2\pi f_0 t)$ où f_0 est une fréquence certaine.
8/ Expliciter la valeur moyenne du SA $z(t)$
9/ Ce SA est-il stationnaire au sens large ?
10/ Expliciter la dsp du SA $z(t)$ en fonction de $\Gamma_{xx}(f)$.

II/ AUTOCORRÉLATION ET DENSITÉ SPECTRALE

1/ Rappeler les principales propriétés de la fonction d'autocorrélation et de la densité spectrale de puissance (dsp) d'un signal aléatoire (SA) scalaire et stationnaire.
2/ Justifier pourquoi les fonctions

$$g_1(f) = \frac{f}{1+T^4 f^4} \quad \text{et} \quad g_2(f) = \frac{1}{1+j2\pi fT}$$

avec T réel ne sont pas des dsp de puissance d'un SA.
3/ Justifier pourquoi les fonctions

$$h_1(\tau) = |\tau|\exp(-|\tau|/T),\ h_2(\tau) = \begin{cases}\exp(-\tau/T) \text{ si } \tau \geq 0\\ 0 \text{ sinon}\end{cases} \quad \text{et } h_3(\tau) = \begin{cases}1 \text{ si } |\tau| < T\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

avec $T > 0$ ne sont pas des fonctions d'autocorrélation d'un SA.

III/ VARIANCE D'ALLAN

Cet exercice s'intéresse à la variance d'Allan qui est fréquemment utilisée pour caractériser la stabilité dans le temps de la fréquence des oscillateurs. Soit $x(t)$ un signal aléatoire (SA) scalaire, réel, stationnaire, centré, de fonction d'autocorrélation $\gamma_{xx}(\tau)$, de densité spectrale de puissance (dsp) $\mathit{\Gamma}_{xx}(f)$ et de puissance P_x.

1/ Rappeler la définition d'un SA stationnaire.
2/ Rappeler la définition de $\gamma_{xx}(\tau)$ ainsi que celle de $\mathit{\Gamma}_{xx}(f)$.
3/ Expliciter P_x en fonction de $\gamma_{xx}(\tau)$ puis en fonction de $\mathit{\Gamma}_{xx}(f)$.

On considère le SA $y(t)$ qui se déduit de $x(t)$ par la relation

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(\theta)\, d\theta \text{, avec } T > 0 .$$

4/ Montrer que le système qui permet de $x(t)$ à $y(t)$ est un filtre linéaire (FL). Expliciter sa réponse impulsionnelle (RI) $h(t)$ ainsi que sa réponse en fréquence (RF) $H(f)$. Le FL est-il causal ?
5/ Le SA $y(t)$ est-il stationnaire ?
6/ Rappeler la formule des interférences dans le cas général.
7/ Expliciter la dsp $\mathit{\Gamma}_{yy}(f)$ du signal $y(t)$ en fonction de $\mathit{\Gamma}_{xx}(f)$.
8/ Montrer que la puissance P_y du signal $y(t)$ se met sous la forme

$$P_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi fT)}{(\pi fT)^2}\, \mathit{\Gamma}_{xx}(f)\, \mathrm{d}f \ .$$

On considère le signal constant par morceaux

$$d(t) = \frac{y\big((k+1)T\big) - y\big(kT\big)}{\sqrt{2}} \ \text{ si } t \in \big[kT, (k+1)T\big[\text{, avec } k \in \mathcal{Z} .$$

9/ Déterminer la puissance $P_d(T)$ du signal $d(t)$ en fonction de $\gamma_{yy}(0)$ et de $\gamma_{yy}(T)$.

10/ Expliciter $P_d(T)$ sous forme intégrale en fonction de $\Gamma_{xx}(f)$. En déduire que

$$P_d(T) = 4\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(\pi f T)}{(\pi f T)^2} \Gamma_{xx}(f)\,\mathrm{d}f\ .$$

$P_d(T)$ est appelée variance d'Allan du signal $x(t)$.

On précise que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(u)}{u^3}\,\mathrm{d}u = \ln(2)$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(u)}{u^4}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{3}$.

11/ Représenter graphiquement $\log(P_d(T))$ en fonction de $\log(T)$ dans les cas suivants :

– $x(t)$ est un bruit blanc,

– $x(t)$ est un bruit de scintillement ou encore en $1/f$: $\Gamma_{xx}(f) = \alpha/|f|$, $\alpha > 0$,

– $x(t)$ est un bruit brownien : $\Gamma_{xx}(f) = \alpha/f^2$, $\alpha > 0$.

Quel est l'intérêt de la variance d'Allan ?

IV/ SIGNAL ANALYTIQUE, ENVELOPPE COMPLEXE ET DÉCOMPOSITION EN PHASE ET EN QUADRATURE

1/ On considère un signal $x(t)$ scalaire, réel et centré et, sous réserve d'existence, on note $X(f)$ sa transformée de Fourier. Vérifier que $X(-f) = X^*(f)$.

On appelle filtre analytique le filtre linéaire de réponse en fréquence $H_a(f) = 2\,u(f)$ où $u(f)$ est le signal échelon d'Heaviside ($u(f) = 1$ si $f \geq 0$ et $u(f) = 0$ sinon). Le signal $x(t)$ est appliqué à l'entrée du filtre analytique et on note $x_a(t)$ le signal de sortie qui est appelée signal analytique.

2/ Le signal $x_a(t)$ peut-il être réel ?

3/ Le signal $x(t)$ étant réel, établir que $x(t) = \mathrm{Re}(x_a(t))$, où $\mathrm{Re}(c)$ désigne la partie réelle du nombre complexe c.

On considère un signal aléatoire (SA) $x(t)$ scalaire, réel, centré et stationnaire (au sens strict), de fonction d'autocorrélation $\gamma_{xx}(\tau)$ et de densité spectrale de puissance (dsp) $\Gamma_{xx}(f)$. On suppose de plus que ce signal est de puissance finie.

4/ Rappeler la définition de $\gamma_{xx}(\tau)$ puis celle de $\Gamma_{xx}(f)$.

5/ Expliciter la puissance du signal $x(t)$ en fonction de $\gamma_{xx}(\tau)$ puis en fonction de $\Gamma_{xx}(f)$.

6/ Le signal analytique $x_a(t)$ associé à $x(t)$ est-il stationnaire ?

7/ Expliciter la moyenne du signal $x_a(t)$.

8/ Rappeler la formule des interférences dans le cas général (préciser les notations).

9/ Expliciter la dsp $\Gamma_{x_a x_a}(f)$ du signal $x_a(t)$ en fonction de $\Gamma_{xx}(f)$.

10/ En appliquant la formule des interférences, établir que $\mathrm{E}[x_a(t) x_a(t-\tau)] = 0 \quad \forall t \in \Re$ et $\forall \tau \in \Re$.

L'enveloppe complexe $e(t)$ du signal $x(t)$ par rapport à la fréquence f_0 arbitraire est définie par $e(t) = x_a(t)\exp(-j2\pi f_0 t)$ où $x_a(t)$ est le signal analytique associé à $x(t)$.

11/ Expliciter $\mathrm{E}[e(t)e(t-\tau)]$.

12/ Le signal $e(t)$ est-il stationnaire au sens large ?

On pose $e(t) = p(t) + jq(t)$, $p(t)$ et $q(t)$ étant réels (avec $j^2 = -1$). On a donc $p(t) = \dfrac{e(t) + e^*(t)}{2}$ et $q(t) = \dfrac{e(t) - e^*(t)}{2j}$.

13/ Expliciter $x(t)$ en fonction de $p(t)$ et $q(t)$.

14/ Expliciter la moyenne des signaux $p(t)$ et $q(t)$.

15/ Expliciter $\gamma_{pp}(\tau)$, $\gamma_{qq}(\tau)$ ainsi que la fonction d'intercorrélation entre le signal $p(t)$ et le signal $q(t)$ en fonction de $\gamma_{ee}(\tau)$.

16/ En déduire que les signaux $p(t)$ et $q(t)$ sont décorrélés au même instant.

17/ Comparer les dsp des signaux $p(t)$ et $q(t)$ puis les puissances des signaux $x(t)$, $p(t)$ et $q(t)$.

18/ On suppose que $\Gamma_{x_a x_a}(f)$ est symétrique autour de la fréquence f_0. En déduire que $p(t_1)$ et $q(t_2)$ sont décorrélés quels que soient les instants t_1 et t_2.

V/ SIGNAL BINAIRE

Soit A_k, $k \in Z$, une suite de variables aléatoires (VA), scalaires, indépendantes deux à deux, identiquement distribuées (iid), et prenant les valeurs ± 1 avec la même probabilité.

1/ Déterminer $\mathrm{E}[A_k]$, moyenne de la VA A_k, ainsi que $\mathrm{E}[A_p A_q]$.

On construit à partir de cette suite aléatoire le signal aléatoire (SA)

$$x(t) = \sum_k A_k h(t - kT) \text{ avec } T > 0 \text{ et } h(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in [0, T[, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

2/ Représenter un exemple (quelconque) de trajectoire de ce SA.

3/ Expliciter la moyenne statistique du SA $x(t)$ ainsi que sa puissance statistique, $\mathrm{E}[x(T/4)x(3T/4)]$ et $\mathrm{E}[x(3T/4)x(5T/4)]$.

4/ Le SA $x(t)$ est-il stationnaire ?

On introduit une VA Θ uniformément répartie entre 0 et T.

5/ Expliciter sa densité de probabilité (ddp) $f_\Theta(\theta)$.

On construit ensuite le SA $y(t) = \sum_k A_k h(t - kT - \Theta)$. On suppose de plus que les VA Θ et A_k, $k \in Z$, sont indépendantes dans leur ensemble.

6/ Représenter deux exemples (quelconques) de trajectoire.

7/ Expliciter la moyenne statistique du SA $y(t)$.

8/ On cherche à exprimer $\mathrm{E}[y(t)y(t-\tau)]$. On considère tout d'abord le cas où $|\tau| \geq T$. Que peut-on dire des VA $y(t)$ et $y(t-\tau)$? En déduire la moyenne $\mathrm{E}[y(t)y(t-\tau)]$ dans le cas où $|\tau| \geq T$.

9/ Démontrer ensuite que $\mathrm{E}[y(t)y(t-\tau)] = (1 - |\tau|/T)$ si $|\tau| < T$. (Indication : faire un changement de variable pour exprimer $\mathrm{E}[y(t)y(t-\tau)]$ sous la forme d'une intégrale dont les bornes sont infinies.)

10/ Le sa $y(t)$ est-il stationnaire au sens large ?

11/ Expliciter la densité spectrale de puissance (dsp) $\Gamma_{yy}(f)$ du SA $y(t)$.

On considère le SA $e(t) = \sum_k A_k \delta(t - kT - \Theta)$, les VA Θ et A_k étant définies précédemment.

12/ Représenter deux exemples de trajectoire de ce SA.

13/ Expliciter la moyenne du SA $e(t)$. Le SA $e(t)$ est filtré par un filtre linéaire de réponse impulsionnelle $h(t)$ définie précédemment. À quoi est égal $s(t)$, signal en sortie du filtre ? On démontre que le SA $s(t)$ est stationnaire.

14/ Justifier simplement pourquoi si le signal d'entrée d'un filtre linéaire est stationnaire, il en est de même du signal de sortie.

15/ Soit $x(t)$ un sa stationnaire qui est filtré par un filtre linéaire de réponse en fréquence $G(f)$. On note $y(t)$ le signal de sortie. Justifier **simplement** pourquoi $\Gamma_{yy}(f) = |G(f)|^2 \Gamma_{xx}(f)$.

16/ En déduire la dsp du signal $e(t)$ ainsi que sa fonction d'autocorrélation. Qualifier ce signal.

VI/ FILTRAGE NON LINÉAIRE

On considère un filtre non linéaire à temps discret (TD) dont la relation entre le signal d'entrée $X[n]$, qui est scalaire et réel, et le signal de sortie $Y[n]$ ($n \in Z$) est la suivante

$$Y[n] = \exp(a + bX[n]),$$

a et b étant des grandeurs réelles, scalaires et certaines. On suppose dans un premier temps que le signal d'entrée $X[n]$ est un bruit blanc gaussien d'écart type σ.

1/ Expliciter les termes *blanc* et *gaussien*.

2/ Rappeler la définition de la fonction d'autocorrélation statistique $\gamma_{SS}[k]$ d'un signal aléatoire (SA) scalaire et stationnaire à TD $S[n]$ ainsi que celle de sa densité spectrale de puissance (dsp).

3/ Rappeler la définition d'un SA stationnaire au sens large.

4/ Expliciter la densité de probabilité (ddp) du couple aléatoire $(X[n]\; X[n-k])$, pour $k \neq 0$.

5/ Vérifier que la moyenne du SA $Y[n]$ est égale à $\exp(a)\exp\left(b^2 \frac{\sigma^2}{2}\right)$.

6/ Expliciter la moyenne du signal $Y^2[n]$. En déduire l'écart type du SA $Y[n]$.

7/ Expliciter la fonction d'autocorrélation $\gamma_{YY}[k]$ du SA $Y[n]$ en fonction de a, b et σ.

8/ Le SA $Y[n]$ est-il stationnaire au sens large ?

On suppose maintenant que le signal $X[n]$ est un bruit gaussien, centré, de puissance statistique σ^2 et de fonction d'autocorrélation $\gamma_{XX}[k]=\rho[k]\sigma^2$ avec $0 \le |\rho[k]| < 1$ si $k \ne 0$. On considère le couple aléatoire $(U\ V)^{\mathrm{T}}$ avec $U = X[n]$ et $V = X[n-k]$.

9/ Expliciter la matrice de covariance $\mathbf{\Sigma}$ du vecteur aléatoire $(U\ V)^{\mathrm{T}}$.

10/ Expliciter les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $\mathbf{\Sigma}$.

On pose

$$\mathbf{P}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\ \mathbf{D}=\sigma^2\begin{pmatrix}1+\rho[k] & 0\\ 0 & 1-\rho[k]\end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{D}^{1/2}=\sigma\begin{pmatrix}\sqrt{1+\rho[k]} & 0\\ 0 & \sqrt{1-\rho[k]}\end{pmatrix},$$

et on considère le vecteur aléatoire $\begin{pmatrix}Z\\ W\end{pmatrix}=\mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}U\\ V\end{pmatrix}$.

11/ Vérifier que $\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{P}^{\mathrm{T}}$ et que $\mathbf{\Sigma}=\mathbf{PDP}^{\mathrm{T}}$.

12/ Expliciter la matrice de covariance du vecteur aléatoire $(Z\ W)^{\mathrm{T}}$. Que peut-on dire des VA Z et W ?

13/ Expliciter $\gamma_{YY}[k]$ en fonction de a, b, σ et $\rho[k]$.

14/ Le SA $Y[n]$ est-il stationnaire au sens large ?

VII/ ÉLÉMENTS DE CORRECTION DES EXERCICES

Signaux aléatoires

1/ SA stationnaire au sens strict $\Leftrightarrow$ toutes ses caractéristiques sont indépendantes de l'origine des temps

2/ SA stationnaire au sens large $\Leftrightarrow \begin{cases} m_x(t) = m_x \quad \forall t \\ \gamma_{xx}(t, t-\tau) = E[x(t)\, x^*(t-\tau)] = \gamma_{xx}(\tau) \\ + E[|x(t)|^2] < \infty \end{cases}$

3/ $E[x(t)] = m_x(t) = m_x = 0$ car SA centré

4/ $\gamma_{xx}(\tau) = E[x(t)\, x^*(t-\tau)]$ $\quad \Gamma_{xx}(f) = TF[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t} dt$

5/ $P_x = \gamma_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{xx}(f)\, df$.

6/ $\gamma_{yy}(t, t-\tau) = \cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0(t-\tau))\ \gamma_{xx}(\tau)$

7/ $\gamma_{yy}(t, t-\tau)$ est fonction de t et $(t-\tau) \Rightarrow y(t)$ n'est pas un SA stationnaire au sens large

8/ $E[z(t)] = e^{j2\pi f_0 t}\, m_x = 0$

$z(t) = x(t)\, e^{j2\pi f_0 t}$

9/ $\begin{cases} \gamma_{zz}(t, t-\tau) = E\left[x(t)\, e^{j2\pi f_0 t}\, x(t-\tau)\, e^{-j2\pi f_0 (t-\tau)}\right] = e^{j2\pi f_0 \tau}\ \gamma_{xx}(\tau) = \gamma_{zz}(\tau) \\ \gamma_{zz}(0) = P_x < \infty \end{cases}$

$\Rightarrow z(t) = $ SA stationnaire au sens large.

10/ $\Gamma_{zz}(f) = TF[\gamma_{xx}(\tau)\, e^{j2\pi f_0 \tau}] = \Gamma_{xx}(f - f_0)$.

Corrélation et densité spectrale

1/ Soit $\gamma_{xx}(\tau)$ la fonction de corrélation d'un SA scalaire et stationnaire : $\gamma_{xx}(\tau) = E[x(t)\, x^*(t-\tau)]$. Alors :

* $|\gamma_{xx}(\tau)| \leq \gamma_{xx}(0) = P_x$ = puissance du SA
* $\gamma_{xx}(-\tau) = \gamma^*_{xx}(\tau)$ (paire pour un signal réel)

Soit $\Gamma_{xx}(f)$ sa DSP : $\Gamma_{xx}(f) = TF[\gamma_{xx}(\tau)]$. Alors :

* $\Gamma_{xx}(f)$ réel (paire pour un signal réel)
* $\Gamma_{xx}(f) \geq 0$
- $P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{xx}(f)\, df$

2/ • $g_1(f) = \dfrac{f}{1+T^4 f^4} < 0 \quad \forall f < 0 \rightarrow g_1(f)$ ne peut pas être une DSP

• $g_2(f) = \dfrac{1}{1+j2\pi f T}$ est complexe $\rightarrow g_2(f)$ ne peut pas être une DSP

3/ • $h_1(\tau) = |\tau|\, e^{-|\tau|/T} \rightarrow h_1(0) = 0 \rightarrow$ on n'a pas $|h_1(\tau)| \leq h_1(0)$

$\rightarrow h_1(\tau)$ n'est pas une fonction de corrélation

• $h_2(\tau) = \begin{cases} e^{-\tau/T} & \forall \tau \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \rightarrow h_2(-\tau) \neq h_2^*(\tau) \rightarrow h_2(\tau)$ n'est pas une fonction de corrélation

• $h_3(\tau) = \begin{cases} 1 \text{ si } |\tau| < T \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \rightarrow TF[h_3(\tau)] = 2T \dfrac{\sin(2\pi f T)}{2\pi f T}$

qui n'est pas toujours positif

$\rightarrow h_2(\tau)$ n'est pas une fonction de corrélation

Variance d'Allan

1/ Un SA est stationnaire au sens strict si toutes ses caractéristiques statistiques sont indépendantes de l'origine des temps.

2/ $\gamma_{xx}(\tau) = E[x(t)\, x(t-\tau)]$ $\qquad \Gamma_{xx}(f) = TF[\gamma_{xx}(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$

3/ $P_x = E[x^2(t)] = \gamma_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{xx}(f)\, df$.

4/ • $Y(p) = \dfrac{1-e^{-pT}}{pT} X(p) \Rightarrow$ système = FL.

• $h(t)$ causal $\rightarrow$ FL causal.

$G(f) = e^{-j\pi f T} \dfrac{\sin \pi f T}{\pi f T}$

$h(t) = \dfrac{u(t) - u(t-T)}{T}$

avec $u(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \le 0 \\ 1 \text{ si } t \ge 0 \end{cases}$

5/ La stationnarité se conserve par FL.

Or $x(t)$ = SA stationnaire $\rightarrow y(t)$ = SA stationnaire

6/ $e_1(t) \longrightarrow \boxed{H_1(f)} \longrightarrow s_1(t)$

$e_2(t) \longrightarrow \boxed{H_2(f)} \longrightarrow s_2(t)$

+ $e_1(t)$ et $e_2(t)$ stationnaires dans leur ensemble $\rightarrow$

$\Gamma_{s_1 s_2}(f) = H_1(f) H_2^*(f) \Gamma_{e_1 e_2}(f)$

7/ $\Gamma_{yy}(f) = \dfrac{\sin^2(\pi f T)}{(\pi f T)^2} \Gamma_{xx}(f)$

8/ $P_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{yy}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\sin^2(\pi f T)}{(\pi f T)^2} \Gamma_{xx}(f)\, df$

9/ $P_d = E[d^2(t)] = P_y - \gamma_{yy}(T) = \gamma_{yy}(0) - \gamma_{yy}(T)$

10/ $P_d = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{(1 - e^{+j2\pi f T})}_{= e^{+j\pi f T}(-2j)\sin(\pi f T)} \dfrac{\sin^2(\pi f T)}{(\pi f T)^2} \Gamma_{xx}(f)\, df.$

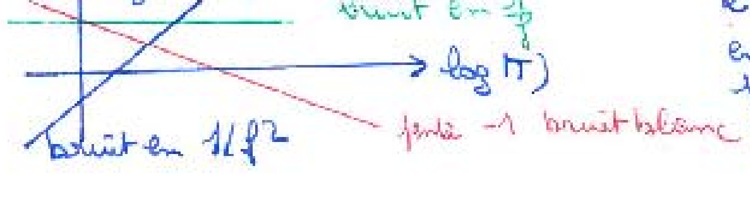
$\underset{\Gamma_{xx}(f) \text{ paire}}{\overset{\uparrow}{=}} \int_0^{+\infty} -2j \underbrace{(e^{+j\pi f T} - e^{-j\pi f T})}_{+2j \sin(\pi f T)} \dfrac{\sin^3(\pi f T)}{(\pi f T)^2} \Gamma_{xx}(f)\, df$

$= 4 \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin^4(\pi f T)}{(\pi f T)^2} \Gamma_{xx}(f)\, df = P_d$

11/ • $x(t)$ = bruit blanc $\rightarrow P_d = \Gamma_0 \rightarrow P_d = \dfrac{\Gamma_0}{T}$

• $x(t)$ = bruit en $\dfrac{1}{f}$ $\rightarrow P_d = 4\alpha \log 2$

• $x(t)$ = bruit en $\dfrac{1}{f^2}$ $\rightarrow P_d = \dfrac{4\pi^2}{3}\alpha\, T$



L'évolution de $\log(P_d(T))$ en fonction de $\log(T)$ permet, à partir de la pente, de déterminer la nature du bruit.

Signal analytique, enveloppe complexe et décomposition en phase et en quadrature

1/ • $X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-j2\pi ft}\,dt$

• $X(-f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{j2\pi ft}\,dt=\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-j2\pi ft}\,dt\right)^*=X^*(f)=X(-f)$ symétrie hermitienne

2/ $X_a(f)=2u(f)X(f)\ \to\ X_a(-f)\neq X_a^*(f)\ \to\ x_a(t)\notin\mathbb{R}$

3/ • Soit $y(t)=\frac{x_a(t)+x_a^*(t)}{2}=Re(x_a(t))$

• $TF[x_a^*(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} x_a^*(t)\,e^{-j2\pi ft}\,dt=\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t)\,e^{j2\pi ft}\,dt\right)^*=X_a^*(-f)$

• $Y(f)=\frac{X_a(f)+X_a^*(-f)}{2}=\frac{\cancel{2}u(f)X(f)+\cancel{2}u(-f)X^*(-f)}{\cancel{2}}\underset{1/}{=}\frac{u(f)X(f)+u(-f)X(f)}{2}$

$=X(f)\ \forall f\ \to\ y(t)=x(t)\ \to\ x(t)=Re(x_a(t))$

4/ • $\gamma_{xx}(\tau)=E[x(t)\,x^*(t-\tau)]\underset{x(t)\in\mathbb{R}}{=}E[x(t)\,x(t-\tau)]$

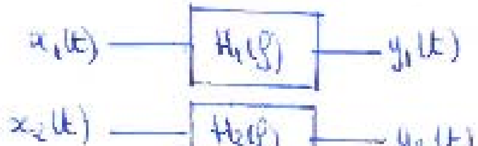
• $\Gamma_{xx}(f)=TF[\gamma_{xx}(\tau)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma_{xx}(\tau)\,e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau$

5/ $P_x=E[|x(t)|^2]=\gamma_{xx}(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{xx}(f)\,df$.

6/ $x(t)$ est stationnaire
$x_a(t)$ est obtenu par filtrage linéaire de $x(t)$
la stationnarité se conserve par filtrage linéaire (FL)
$\to$ $x_a(t)$ est stationnaire

7/ $m_{x_a}=H_a(0)\,m_x\underset{x(t)=\text{SA centré}}{=}0$

8/ Soient $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux SA stationnaires dans leur ensemble et deux FL de réponse en fréquence $H_1(f)$ et $H_2(f)$.



$\Gamma_{y_1y_2}(f)=H_1(f)\,H_2^*(f)\,\Gamma_{x_1x_2}(f)$

9/ $\Gamma_{x_ax_a}(f)=|H_a(f)|^2\,\Gamma_{xx}(f)=4u(f)\,\Gamma_{xx}(f)=\begin{cases}4\Gamma_{xx}(f) & \forall f\geq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

10/ $E[x_a(t)\,x_a(t-\tau)]=E[x_a(t)\,y^*(t-\tau)]=\gamma_{x_ay}(\tau)$ avec $y(t)=x_a^*(t)\ \to$

$Y(f)\underset{3/}{=}X_a^*(-f)=2u(-f)X^*(-f)=2u(-f)X(f)=H_2(f)X(f)\ \to$

avec $H_2(f)=2u(-f)$

$\Gamma_{x_ay}(f)=H_a(f)\,H_2^*(f)\,\Gamma_{xx}(f)=4\underbrace{u(f)\,u(-f)}_{=0\ \forall f\neq 0}\Gamma_{xx}(f)=0\ \forall f\neq 0$, $\Gamma_{x_ay}(0)=4\Gamma_{xx}(0)$

$\gamma_{x_ay}(\tau)=0\ \to\ E[x_a(t)\,x_a(t-\tau)]=0\ \forall\tau\ \forall t$

11/ $E[e(t)e(t-\tau)] = E[x_a(t)x_a(t-\tau)]\, e^{-j2\pi f_0(2t-\tau)} \overset{!}{=} 0$

12/ • $E[e(t)] = E[x_a(t)]\, e^{-j2\pi f_0 t} = 0 = m_e \ \forall t$ → SA centré

• $E[e(t)e^*(t-\tau)] = E[x_a(t)x_a^*(t-\tau)]\, e^{-j2\pi f_0\tau} = \gamma_{x_ax_a}(\tau)\, e^{-j2\pi f_0\tau} = \gamma_{ee}(\tau)$

→ qui ne dépend que de τ

• $P_e = \gamma_{ee}(0) = \gamma_{x_ax_a}(0) = P_{x_a} = \int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{x_ax_a}(f)\,df = 4\int_{0}^{+\infty}\Gamma_{xx}(f)\,df \underset{\uparrow}{=} 2\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{xx}(f)\,df = 2P_x < \infty$.

$x(t)\in\mathbb{R} \Rightarrow \Gamma_{xx}(-f) = \Gamma_{xx}(f)$

→ $e(t)$ est un SA stationnaire au sens large

rq : $e(t)$ n'est pas obtenu par FL.

13/ $\begin{cases} x(t) \overset{3/}{=} \mathrm{Re}(x_a(t)) \\ x_a(t) = e(t)\,e^{j2\pi f_0 t} = (p(t)+jq(t))\,e^{j2\pi f_0 t} \end{cases}$ → $x(t) = \underbrace{p(t)\cos(2\pi f_0 t)}_{\text{composante en phase}} \underbrace{- q(t)\sin(2\pi f_0 t)}_{\text{composante en quadrature}}$

14/ • $m_p = \dfrac{m_e + m_e^*}{2} \overset{12/}{=} 0$ → SA centré

• $m_q = \dfrac{m_e - m_e^*}{2j} = 0$ → " "

15/ • $\gamma_{pp}(\tau) = E[p(t)p(t-\tau)] = E\left[\dfrac{e(t)+e^*(t)}{2}\ \dfrac{e(t-\tau)+e^*(t-\tau)}{2}\right]$ $p(t)\in\mathbb{R}$

$= \dfrac{1}{4}\left\{E[e(t)e(t-\tau)] + E[e(t)e(t-\tau)]^* + E[e(t)e^*(t-\tau)] + E[e(t)e^*(t-\tau)]^*\right\}$

$= \dfrac{1}{4}\left(\gamma_{ee}(\tau) + \gamma_{ee}^*(\tau)\right) = \dfrac{1}{4}\left(\gamma_{ee}(\tau) + \gamma_{ee}(-\tau)\right)$

$q(t)\in\mathbb{R}$

• $\gamma_{qq}(\tau) \overset{!}{=} E\left[\dfrac{e(t)-e^*(t)}{2j}\ \dfrac{e(t-\tau)-e^*(t-\tau)}{2j}\right] = \dfrac{1}{4}\left(\gamma_{ee}^*(\tau) + \gamma_{ee}(\tau)\right)$

$= \dfrac{1}{4}\left(\gamma_{ee}(-\tau) + \gamma_{ee}(\tau)\right) = \gamma_{pp}(\tau)$

• $\gamma_{pq}(\tau) = E\left[\dfrac{e(t)+e^*(t)}{2}\ \dfrac{e^*(t-\tau)-e(t-\tau)}{-2j}\right]$

$= \dfrac{\gamma_{ee}(\tau) - \gamma_{ee}^*(\tau)}{-4j} = \dfrac{\gamma_{ee}(\tau) - \gamma_{ee}(-\tau)}{-4j}$

16/ $\gamma_{pq}(0) = 0$ → $p(t)$ et $q(t)$ sont décorrélés au m̂ instant

17/ $\gamma_{pp}(\tau) = \gamma_{qq}(\tau)$ → $P_p = P_q$ et $\Gamma_{pp}(f) = \Gamma_{qq}(f)$.

$+\ P_p = \gamma_{pp}(0) = \dfrac{\gamma_{ee}(0)}{2} = P_e/2$

→ $P_e = 2P_p = 2P_q$.

18/ • $\Gamma_{x_ax_a}(f_0+f) = \Gamma_{x_ax_a}(f_0-f)$.

• $\gamma_{ee}(\tau) = e^{-j2\pi f_0\tau}\,\gamma_{x_ax_a}(\tau)$ → $\Gamma_{ee}(f) = \Gamma_{x_ax_a}(f+f_0)$ } → $\Gamma_{ee}(-f) = \Gamma_{ee}(f)$ → fonction paire

→ $\gamma_{ee}(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{ee}(f)\,e^{-j2\pi f\tau}\,df \underset{\substack{\uparrow\\ f \leftrightarrow -f}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{ee}(-f)\,e^{+j2\pi f\tau}\,df = \gamma_{ee}(\tau)$ → fonction paire

→ $\gamma_{pq}(\tau) = 0$ → $p(t)$ et $q(t-\tau)$ sont décorrélés $\forall t$ et τ.

Signal binaire

1/ • $E[A_k] = +1\,Pr[A_k=1] + (-1)\,Pr[A_k=-1]$

or $Pr[A_k=1] = Pr[A_k=-1] = p$ et $Pr[A_k=1]+Pr[A_k=-1]=1 \Rightarrow p = 1/2$

$\Rightarrow \underline{E[A_k]=0}$ VA centrée

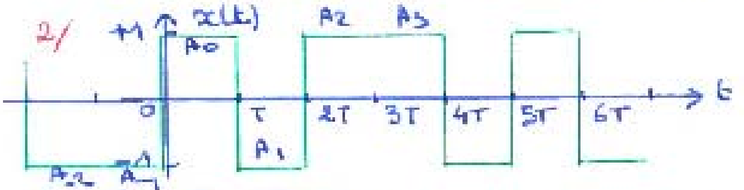
• $E[A_p A_q] \underset{\substack{\uparrow \\ p\neq q}}{=} E[A_p]E[A_q] = 0$

VA indépendantes

• $E[A_p^2=1]=1$

$\Rightarrow E[A_pA_q] = \delta_{p-q}$

2/



3/ • $E[x(t)] \underset{\substack{\uparrow \\ kT \leq t < (k+1)T}}{=} E[A_k] = 0 \Rightarrow$ $\underline{\text{SA centré}}$

• $E[x^2(t)] = P_x = E[A_k^2] = 1$

• $\underline{E[x(\tfrac{T}{4})\,x(\tfrac{3T}{4})]} = \underline{E[A_0^2]=1}$

• $\underline{E[x(\tfrac{3T}{4})\,x(\tfrac{5T}{4})]} = E[A_0A_1]$

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{VA indépendantes}}}{=} E[A_0]E[A_1] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{VA centrées}}}{=} \underline{0}$

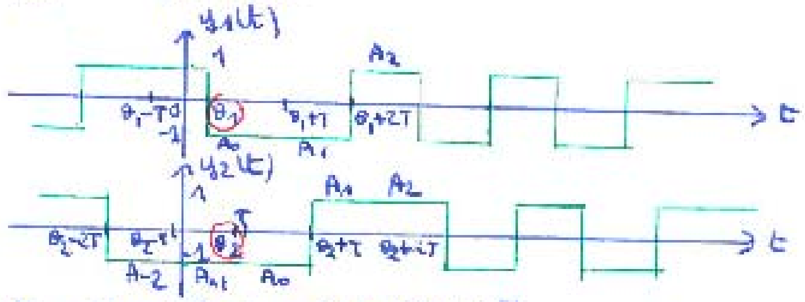
4/ D'après la question précédente,

$E[x(t)\,x(t-\tau)] = \Gamma_{xx}(t, t-\tau)$ dépend à la fois de t et $t-\tau$

$\Rightarrow$ le SA n'est pas stationnaire

5/ $\| \; f_{\Theta}(\theta) = \begin{cases} 1/T & \text{si } \theta \in (0,T) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

6/



7/ $E[y(t)] = E[\sum_k A_k\, h(t-kT-\theta)]$ ↓ linéarité + indépendance θ, A_k

$= \sum_k E[A_k]\, \underbrace{E[h(t-kT-\theta)]}_{\text{finie}}$

$= 0$ car VA A_k centrées $\Rightarrow$ $\underline{\text{SA centré}}$

8/ • $y(t) = A_p$ et $y(t-\tau) = A_q$ avec $p \neq q$ car $|\tau| \geq T \Rightarrow$

$y(t)$ et $y(t-\tau)$ sont 2 VA indépendantes $\Rightarrow$ $\underline{E[y(t)\,y(t-\tau)] = E[y(t)]\,E[y(t-\tau)]}$

$\underline{= 0 \text{ si } |\tau| \geq T}$

9/ • $E[y(t)\,y(t-\tau)] \underset{\uparrow}{=} \sum_p E[A_p^2]\; E[h(t-pT-\theta)\,h(t-pT-\theta-\tau)]$

linéarité $E[\cdot]$ + indépendance VA

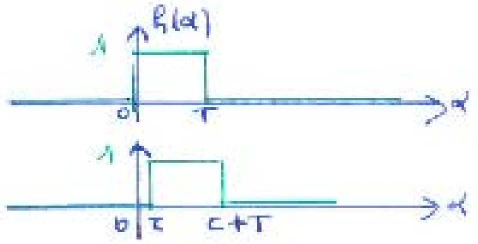
$+ \sum_{p\neq q} \underbrace{E[A_p]}_{0}\, \underbrace{E[A_q]}_{0}\, \underbrace{E[h(t-pT-\theta)\,h(t-qT-\theta-\tau)]}_{\text{finie}}$

$= \sum_p \frac{1}{T} \int_0^T h(t-pT-\theta)\,h(t-pT-\theta-\tau)\,d\theta$

$\underset{\substack{\uparrow \\ \alpha = t-pT-\theta}}{=} \frac{1}{T} \sum_p \int_{-pT-\theta}^{-pT-\theta+T} h(\alpha)\,h(\alpha-\tau)\,d\alpha = \frac{1}{T} \int_{-pT-\theta}^{-pT-\theta+T} h(\alpha)\,h(\alpha-\tau)\,d\alpha$

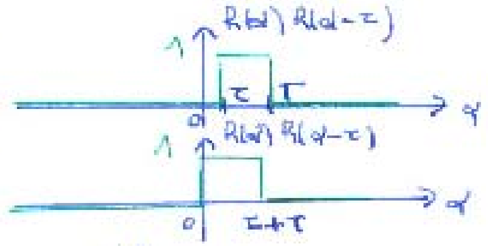
• Or $h(\alpha)$ est à support temporel borné $\Rightarrow$ si $|\tau| > T$ $h(\alpha)\,h(\alpha-\tau) = 0 \Rightarrow$

on retrouve bien que $E[y(t)\,y(t-\tau)] = 0$ si $|\tau| > T$



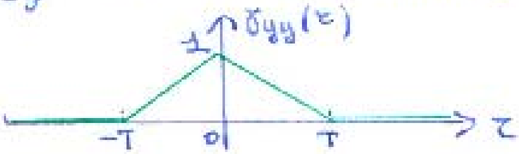
$0 \le \tau < T$

$-T < \tau \le 0$



$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\, h(\alpha-\tau)\, d\alpha = T - |\tau| \Rightarrow$$

$$E[y(t)\, y(t-\tau)] = \begin{cases} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) & \text{si } |\tau| \le T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



10/ $E[y(t)] = 0 \ \forall t$

$E[y(t)\, y(t-\tau)] = \gamma_{xx}(\tau)$ } indépendants de l'origine des temps

$+ \gamma_{xx}(0) = 1 < +\infty \Rightarrow$ y(t) est un SA stationnaire au sens large

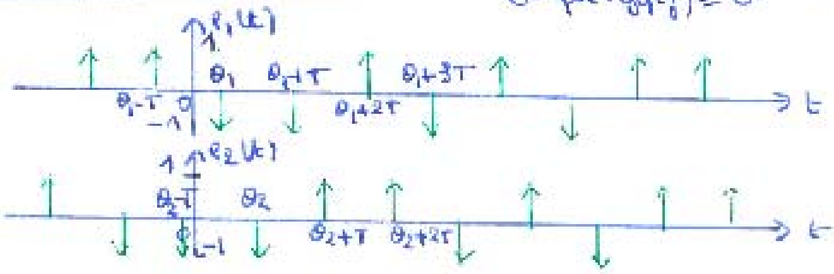
11/ $\Gamma_{yy}(f) = TF[\gamma_{yy}(\tau)]$

or $\gamma_{yy}(\tau) = \frac{1}{T}(h_1 * h_2)(\tau)$ avec $h_1(\tau) = h(\tau)$ et $h_2(\tau) = h(-\tau)$

$TF[h(\tau)] = e^{-j\pi f T} \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \times T = H(f)$ $\quad TF[h_2(t)] = H(-f) \Rightarrow$

$\Gamma_{yy}(f) = T \left(\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}\right)^2$ (on vérifie bien que $\Gamma_{yy}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_{yy}(\tau)\, d\tau$ et que $\Gamma_{yy}(f) \ge 0$.)

12/

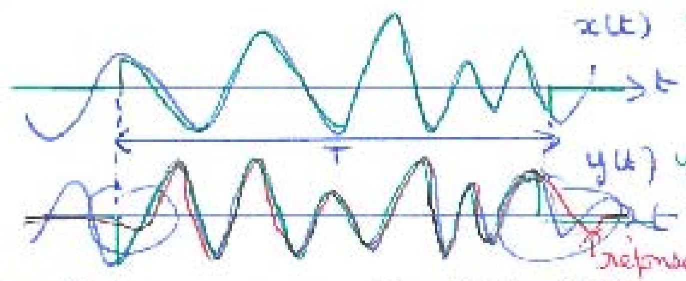


13/ • $E[e(t)] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{linéarité} \\ + \text{ indépendance VA}}}{=} \sum_k E[A_k]\, \underbrace{E[\delta(t-kT-\Theta)]}_{\text{fini}} \underset{\substack{\uparrow \\ A_k : \text{ VA centrées}}}{=} 0 \Rightarrow$ e(t) SA centré

• $s(t) = (h * e)(t) = \sum_k A_k\, h(t - kT - \Theta) = y(t) = s(t)$

14/ Un filtre linéaire est un système à temps invariant / stationnaire. Ainsi si le signal d'entrée est stationnaire, il en sera de même du signal de sortie $\Rightarrow$ la stationnarité se conserve par filtrage linéaire

15/



réponse du filtre à $x_T(t)$ $\Rightarrow$ sauf sur les bords, on a $y_T(t) \simeq (g * x_T)(t) \Rightarrow Y_T(f) \simeq G(f)\, X_T(f)$.

$\Gamma_{yy}(f) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} E\left[|Y_T(f)|^2\right]$ et si T "grand" $Y_T(f) \simeq G(f)\, X_T(f)$

$\Rightarrow \Gamma_{yy}(f) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} E\left[|G(f)|^2 |X_T(f)|^2\right] = \underline{|G(f)|^2\, \Gamma_{xx}(f) = \Gamma_{yy}(f)}$

16/ $|H(f)| = T\left|\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}\right| \Rightarrow \Gamma_{ss}(f) = \frac{1}{T}|H(f)|^2 = |H(f)|^2\, \Gamma_{ee}(f)$

$\Rightarrow \Gamma_{ee}(f) = \frac{1}{T} \quad \forall f.$

$\Rightarrow \underline{\gamma_{ee}(\tau) = \frac{1}{T}\delta(\tau)}$

$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\}$ $e(t)$ est un <u>bruit blanc</u>.

Filtrage non linéaire

1/. Bruit blanc = SA stationnaire / dsp = $\Gamma_{xx}(f) = \Gamma_0 > 0$ →

pour bruit blanc à TD scalaire $\left| \begin{array}{l} m_x[n] = E[X[n]] = 0 \\ \gamma_{xx}[k] = E[X[n]\, X^*[n-k]] = \Gamma_0\, \delta[k] \end{array} \right.$

- Bruit gaussien à TD = bruit / $X[n_1] \dots X[n_p]$ est une suite de VA gaussiennes dans leur ensemble

2/. $\gamma_{SS}[k] = E[S[n]\, S^*[n-k]]$ = fonction d'autocorrélation

. $\Gamma_{SS}(f) = TF[\gamma_{SS}[k]] = \sum_k \gamma_{SS}[k]\, e^{-j2\pi fk}$ = dsp.

3/ . SA stationnaire au sens large $\underset{TD}{\overset{\uparrow}{=}}$ SA / $\left| \begin{array}{l} E[X[n]] = m_x[n] = m_x \\ E[X[n]\, X^*[n-k]] = \gamma_{xx}[k] \\ \gamma_{xx}[0] < \infty \end{array} \right.$

4/ $X[n]$ = bruit blanc $\xrightarrow{k \neq 0}$ $X[n]$ et $X[n-k]$ sont décorrélés. Or $X[n]$ = SA $\mathcal{N}$ → $X[n]$ et $X[n-k]$ sont des VA indépendantes

$\underset{\text{SA réel}}{\overset{\uparrow}{\Rightarrow}}$ $f_{X[n]\,X[n-k]}(x[n], x[n-k]) = f_{X[n]}(x[n]) \cdot f_{X[n-k]}(x[n-k])$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2}\, \frac{x[n]^2 + x[n-k]^2}{\sigma^2}\right)$$

5/ $E[Y[n]] = e^{a}\, e^{bX[n]}] = e^{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, \underbrace{\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2} + bx\right]}_{= \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-\sigma^2 b)^2}{\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{b^2\sigma^2}{2}\right)} dx$

$$\to E[Y[n]] = e^{a}\, e^{b^2\frac{\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp -\frac{1}{2}\frac{(x-\sigma^2 b)^2}{\sigma^2}}_{= \mathcal{N}(\sigma^2 b, \sigma^2)}\, dx \quad \to \int_{-\infty}^{+\infty} \dots\, dx = 1$$

$\to E[Y[n]] = e^{a}\, e^{b^2\frac{\sigma^2}{2}}$

6/. $E[Y^2[n]] = e^{2a}\, e^{2bX[n]}] \underset{a \to 2a \,/\, b \to 2b}{\overset{\uparrow}{=}} e^{2a}\, e^{2b^2\sigma^2} = E[Y^2[n]]$

- $\sigma_Y^2 = E[Y^2[n]] - E[Y[n]]^2 = e^{2a}\left(e^{2b^2\sigma^2} - e^{b^2\sigma^2}\right) = e^{2a}\, e^{b^2\sigma^2}\left(e^{b^2\sigma^2} - 1\right)$.

$\sigma_Y = e^{a}\, e^{b^2\sigma^2/2} \sqrt{e^{b^2\sigma^2} - 1}$

7/ $\gamma_{YY}[k] = E[Y[n]\, Y[n-k]] = e^{2a}\, E[e^{bX[n]}\, e^{bX[n-k]}]$ →

$$\begin{cases} \text{. si } k \neq 0 \quad \gamma_{YY}[k] \underset{X[n] \text{ et } X[n-k] \text{ indépendants}}{\overset{\uparrow}{=}} e^{2a}\, E[e^{bX[n]}]\, E[e^{bX[n-k]}] = e^{2a}\, e^{b^2\sigma^2} \\ \text{. si } k = 0 \quad \gamma_{YY}[k] = e^{2a}\, E[e^{2bX[n]}] = e^{2a}\, e^{2b^2\sigma^2}. \end{cases} \to$$

$$\gamma_{YY}[k] = \left| \begin{array}{ll} e^{2a}\, e^{2b^2\sigma^2} & \text{si } k = 0 \\ e^{2a}\, e^{b^2\sigma^2} & \text{si } k \neq 0 \end{array} \right.$$

8/ $m_Y[n] = m_Y$ $\quad \gamma_{YY}[k] = E[Y[n]\, Y^*[n-k]]$ $\quad \gamma_{YY}[0] < \infty$

→ SA stationnaire au sens large

9/ $\Sigma = E\left[\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}(U\ V)\right] = E\begin{bmatrix}U^2 & UV\\ UV & V^2\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[k]\\ \gamma_{xx}[k] & \gamma_{xx}[0]\end{pmatrix} \underset{\uparrow}{=} \sigma^2\begin{pmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{pmatrix} = \Sigma$

$\rho = \rho[k]$

10/ • valeurs propres : $\det(\Sigma - \lambda I) = 0 = \begin{vmatrix}\sigma^2-\lambda & \sigma^2\rho\\ \sigma^2\rho & \sigma^2-\lambda\end{vmatrix} = (\sigma^2-\lambda)^2 - \sigma^4\rho^2$

$\Leftrightarrow \lambda_\pm = \sigma^2(1\pm\rho)$

• vecteurs propres : • $\rho\sigma^2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = 0 \rightarrow \alpha = -\beta$

$\Leftrightarrow v_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

• $\rho\sigma^2\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = 0 \rightarrow \alpha = \beta$

$\Leftrightarrow v_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$

11/ • $P^T P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = I \rightarrow P^T = P^{-1}$

• $P D P^T = \frac{\sigma^2}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+\rho & 0\\ 0 & 1-\rho\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \frac{\sigma^2}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+\rho & 1+\rho\\ 1-\rho & -1+\rho\end{pmatrix}$

$= \sigma^2\begin{pmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{pmatrix} = \Sigma = PDP^T$

12/ $E\left[\begin{pmatrix}Z\\ W\end{pmatrix}(Z\ W)\right] = D^{-1/2}P^T\Sigma P D^{-1/2} = D^{-1/2}\underbrace{P^TP}_{I}D\underbrace{P^TP}_{I}D^{-1/2} = D^{-1/2}DD^{-1/2}$

$= I \rightarrow Z$ et W décorrélés, de puissance $= 1$

$\rightarrow Z$ et W $\mathcal{N}(0,1)$ $\rightarrow Z$ et W indépendants

13/ • $\gamma_{YY}[k] = E\left[Y[m]Y[m-k]\right] = e^{2a}E\left[e^{b(X[m]+X[m-k])}\right] = e^{2a}E\left[e^{b(U+V)}\right]$

• or $\begin{pmatrix}U\\ V\end{pmatrix} = PD^{1/2}\begin{pmatrix}Z\\ W\end{pmatrix}$ et $U+V = (1\ 1)\begin{pmatrix}U\\ V\end{pmatrix} = (1\ 1)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{1+\rho} & 0\\ 0 & \sqrt{1-\rho}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Z\\ W\end{pmatrix} \times \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$

$= \sqrt{2}\sigma(1\ 0)\begin{pmatrix}\sqrt{1+\rho}\,Z\\ \sqrt{1-\rho}\,W\end{pmatrix} = \sqrt{2}\sigma\sqrt{1+\rho}\,Z$

$\rightarrow \gamma_{YY}[k] = e^{2a}E\left[e^{b\sqrt{2}\sigma\sqrt{1+\rho}\,Z}\right]$ avec $Z : \mathcal{N}(0,1)$

$\underset{\substack{\uparrow\\ 5}}{=} e^{2a}e^{b^2\sigma^2(1+\rho)} = \gamma_{YY}[k]$

$b \rightarrow b\sqrt{2}\rho\sqrt{1+\rho}$

rq : on retrouve bien les résultats établis au 7/ dans le cas d'un bruit blanc $(\rho[k] = \delta[k])$.

14/ $Y[k]$ SA stationnaire au sens large

ESTIMATION

I/ VARIABLES ALÉATOIRES

1/ Sur la figure 1 sont représentées trois fonctions scalaires et réelles $p_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, de la variable scalaire (VA) et réelle x. En justifiant la réponse, préciser si ces fonctions peuvent représenter des densités de probabilité (ddp) ?

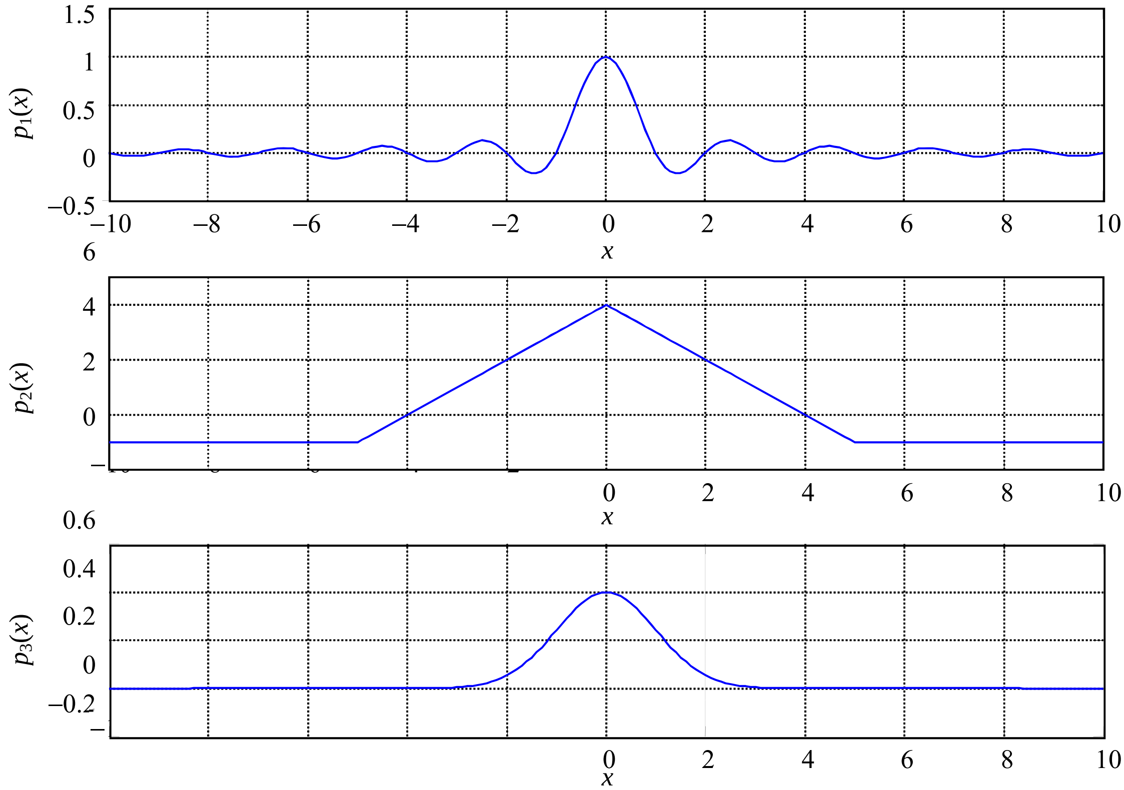


Figure 1

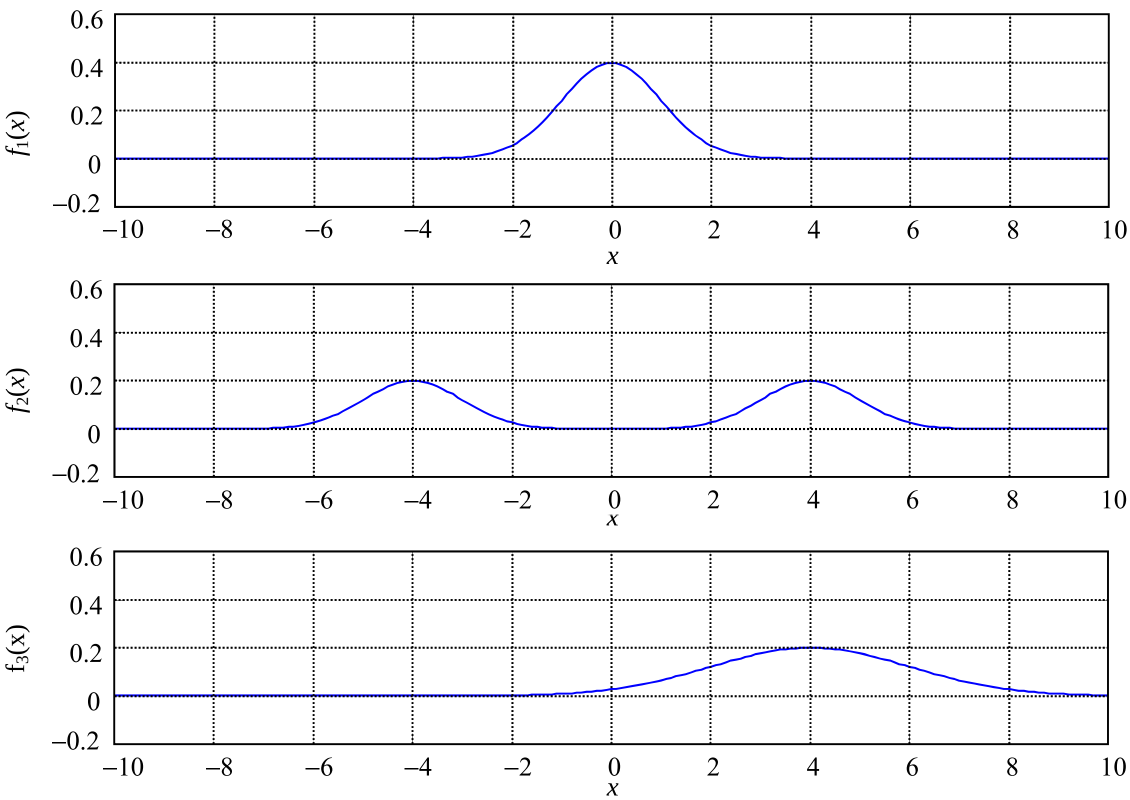


Figure 2

2/ Sur la figure 2 sont représentées les ddp $f_i(x)$ de trois VA X_i, $i=1, 2, 3$. En justifiant la réponse et à vue d'œil, donner un ordre de grandeur de la valeur moyenne de chaque VA. À vue d'œil, classer les VA par ordre d'écart type croissant. Toujours à vue d'œil, classer les VA par ordre croissant de la probabilité que la VA appartienne à l'intervalle $[3, 5]$.

3/ On s'intéresse maintenant à un problème d'estimation. On cherche à estimer un paramètre scalaire et réel θ à partir d'un jeu de données. On envisage trois estimateurs $\hat{\theta}_i$, $i=1, 2, 3$. Dans le but de les comparer, on fabrique une expérience dans laquelle on sait que la vraie valeur du paramètre est 4. Chacun des trois estimateurs $\hat{\theta}_i$ possède la ddp $f_i(x)$, $i=1, 2, 3$, représentée sur la figure 2. En justifiant clairement la réponse, ordonner les estimateurs par ordre de biais croissant. L'un d'entre eux est-il non biaisé ? Ordonner les estimateurs par ordre d'écart type croissant.

II/ BORNE DE CRAMER RAO

Il est courant de vouloir estimer la valeur d'un paramètre certain θ figurant dans une densité de probabilité (ddp) d'une variable aléatoire (VA) X à l'aide d'une fonction $h(X)$. À partir d'une réalisation x de la VA X, on a donc une valeur estimée particulière, $h(x)$, du paramètre θ. L'estimateur $h(X)$ est une grandeur aléatoire. Se pose alors :

– d'une part, la question de savoir si la fonction $h(X)$, que l'on utilise pour estimer la paramètre θ, est ou non biaisée, ce qui revient à comparer l'espérance de l'estimateur $h(X)$ à la valeur du paramètre θ,

– d'autre part, la question de savoir si la fonction $h(X)$ constitue un estimateur efficace, c'est-à-dire a une dispersion ou encore une variance aussi petite que possible.

La borne minimale de la variance est appelée borne de Cramer Rao.

Le but de cet exercice est d'établir l'expression de la borne de Cramer-Rao dans le cas où θ et X sont scalaires. On suppose pour cela que les fonctions qui interviennent sont assez régulières pour pouvoir intervertir les opérateurs dérivation et intégration. On note $f(x, \theta)$ la ddp de la VA X. On suppose de plus que le support de $f(x, \theta)$ ne dépend pas de θ.

1/ Que vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\theta)\,\mathrm{d}x$? En dérivant cette expression par rapport à θ, en déduire tout d'abord que $\mathrm{E}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X,\theta)\right]=0$ puis que $\mathrm{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X,\theta)\right]=-\mathrm{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X,\theta)\right)^2\right]$.

2/ Pourquoi a-t-on $\mathrm{E}\left[\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X,\theta)\right]=0$?

3/ Expliciter la variance de la VA $\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X,\theta)$ sous forme intégrale.

4/ Démontrer que $\frac{\mathrm{dE}[h(X)]}{\mathrm{d}\theta}=\mathrm{E}\left[h(X)\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X,\theta)\right]$. En déduire que $\frac{\mathrm{dE}[h(X)]}{\mathrm{d}\theta}=\mathrm{E}\left[\left(h(X)-\mathrm{E}[h(X)]\right)\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X,\theta)\right]$.

Soient $u(t)$ et $v(t)$ deux fonctions scalaires. Sous réserve de convergence des intégrales, on rappelle que l'on a $\left|\int_{-\infty}^{+\infty}u(t)v(t)\,\mathrm{d}t\right|^2\le\int_{-\infty}^{+\infty}|u(t)|^2\,\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{+\infty}|v(t)|^2\,\mathrm{d}t$.

5/ En déduire que l'écart type σ de $h(X)$ vérifie $\sigma^2\ge-\dfrac{\left(\dfrac{\mathrm{dE}[h(X)]}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}{\mathrm{E}\left[\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X,\theta)\right]}$

6/ Que devient cette expression quand $h(X)$ est non biaisé, c'est-à-dire dans le cas où $\mathrm{E}[h(X)]=\theta$? Conclure.

III/ COMPARAISON D'ESTIMATEURS

On considère deux variables aléatoires (VA) X et B, scalaires, réelles, indépendantes, centrées et gaussiennes, d'écart type respectif σ_X et σ_B.

1/ Expliciter $f_B(b)$, densité de probabilité (ddp) de la VA B.

2/ Expliciter $f_{XB}(x,b)$, ddp conjointe des VA X et B.

On considère également la VA $Y=X+B$.

3/ Expliciter $f_{Y/X=x}(y)$, ddp conditionnelle de la VA Y sachant que la VA X est fixée et égale à x.

4/ Donner l'expression de x qui maximise $f_{Y/X=x}(y)$ à y donné et est encore l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance (MV) de X. Expliciter l'erreur d'estimation, le biais moyen ainsi que l'écart type de l'erreur d'estimation de l'estimateur au sens du MV.

5/ En déduire l'expression de $f_{X/Y=y}(x)$, ddp conditionnelle de la VA X sachant que Y est fixé et égal à y (il n'est pas demandé d'expliciter les termes indépendants de x).

6/ Donner l'expression de x qui maximise $f_{X/Y=y}(x)$ à y donné et est encore l'estimateur au sens du maximum *a posteriori* (MAP) de X. Expliciter l'erreur d'estimation, le biais moyen ainsi que l'écart type de l'erreur d'estimation de l'estimateur au sens du MAP.

7/ On démontre que $f_{X/Y=y}(x)$ est une ddp gaussienne. Expliciter la moyenne conditionnelle suivante $\mathrm{E}[X/Y=y]$ (rq : il n'est pas nécessaire de faire le calcul de l'intégrale). Conclure. On démontre que $\mathrm{E}[X/Y=y]$ est encore l'estimateur bayésien avec un coût quadratique (MQ).

Soient $x(t)$ et $b(t)$ deux signaux aléatoires, scalaires, réels, stationnaires, indépendants, centrés et gaussiens, d'écart type connu noté respectivement σ_x et σ_b. On observe uniquement leur somme $y(t)=x(t)+b(t)$.

8/ Dans le cas où la puissance du bruit est *faible*, proposer un estimateur empirique de $x(t)$.

9/ Dans le cas où la puissance du bruit est *grande*, proposer un estimateur empirique de $x(t)$.

10/ Quel est l'estimateur au sens du MV de $x(t)$?

11/ Expliciter l'estimateur au sens du MAP de $x(t)$.

12/ Quel est l'estimateur bayésien de $x(t)$ avec coût quadratique ?

13/ Comparer les estimateurs d'un point de vue biais et puissance de l'erreur d'estimation.

IV/ ESTIMATEUR DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

On souhaite déterminer la valeur θ d'un vecteur de paramètres certains, réels et constants à partir d'un vecteur de mesures Y dépendant linéairement de ces paramètres. Le vecteur de paramètres est de dimension $n\times 1$ et le vecteur de mesures de dimension $m\times 1$. Le capteur ne fournit pas des données parfaites : la valeur mesurée est une version dégradée de la valeur idéale. On suppose que cette dégradation peut être modélisée par un bruit additif. On a donc $Y=H\theta+B$, H étant une matrice certaine, connue et réelle. On suppose de plus que le bruit de mesure B est une variable aléatoire (VA) réelle, centrée et gaussienne de matrice de covariance Γ_{BB} indépendante de θ. La densité de probabilité (ddp) de la VA B est alors

$$f_B(b)=\frac{1}{(2\pi)^{m/2}\det(\Gamma_{BB})^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}b^T\Gamma_{BB}{}^{-1}b\right).$$

1/ Expliciter la ddp $f_Y(y)$ de la VA Y.

L'estimateur du maximum de vraisemblance (MV) de θ, noté $\hat{\theta}$, étant donnée l'observation y de la VA Y, est la valeur de θ qui maximise la fonction de vraisemblance $V(\theta,y)=f_Y(y)$. On suppose dans toute la suite que la matrice $H^T\Gamma_{BB}{}^{-1}H$ est inversible.

2/ Quelle condition nécessaire doivent vérifier n et m pour que la matrice $H^T\Gamma_{BB}{}^{-1}H$ soit inversible ? Commenter cette condition.

3/ Donner l'expression de l'estimateur du MV en fonction de Y. On rappelle pour cela que si $Q(\theta)=\frac{1}{2}(A\theta-b)^{\mathrm{T}}C\,(A\theta-b)$, où $\theta\in\mathcal{R}^n$, $A\in\mathcal{R}^{m\times n}$, $b\in\mathcal{R}^m$ et $C\in\mathcal{R}^{m\times m}>0$ (c'est-à-dire que C est une matrice symétrique définie positive), alors le minimum de $Q(\theta)$ correspond à l'annulation de son gradient $\nabla_Q(\theta)=A^{\mathrm{T}}\,C\,(A\theta-b)$.

4/ Expliciter la moyenne ainsi que la variance de cet estimateur.

On dispose maintenant de K vecteurs de mesures $Y_k=H\theta+B_k$, $k=1,2,\ldots,K$, où les erreurs de mesure B_k, $k=1,2,\ldots,K$, sont des VA réelles, centrées, gaussiennes, indépendantes et de matrice de covariance Γ_{BB} indépendante de θ.

5/ Expliciter la ddp conjointe des VA Y_k, $k=1,2,\ldots,K$.

6/ Expliciter l'estimateur du MV de θ, noté $\hat{\theta}_K$, étant données les K observations y_k des VA Y_k, $k=1,2,\ldots,K$. Commenter l'estimateur ainsi obtenu.

7/ Expliciter la moyenne ainsi que la variance de cet estimateur. Conclure.

V/ RÉGRESSION LINÉAIRE

On dispose de N couples de données scalaires et réelles (x_n,y_n), $n=1,\ldots,N$, et on cherche la droite d'équation $y=Ax$ la plus proche de ces couples de données. Pour cela, on introduit un modèle, appelé modèle de régression linéaire, défini par

$$Y_n = Ax_n + B_n$$

dans lequel A est une grandeur réelle et scalaire que l'on cherche à estimer, x_n est une valeur déterministe observée, qui est réelle et scalaire, et B_n modélise l'erreur de modèle entre Y_n et Ax_n. On suppose que les erreurs B_n sont des variables aléatoires (VA) scalaires, réelles, indépendantes et identiquement distribuées (iid), de loi normale, centrées et d'écart type σ. On suppose de plus que le vecteur $\mathbf{x} = (x_1 \dots x_N)^{\mathrm{T}}$ n'est pas le vecteur nul.

1/ Expliciter la densité de probabilité (ddp) $f_{B_n}(b_n)$ de la VA B_n.

2/ En précisant clairement la démarche suivie, en déduire la ddp $f_{Y_n}(y_n)$ de la VA Y_n puis la ddp $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$ du vecteur $\mathbf{Y} = (Y_1 \dots Y_N)^{\mathrm{T}}$ en fonction de x_n et y_n, $n = 1, \dots, N$.

Dans un premier temps, on suppose que l'écart type de l'erreur de modèle est connu, le seul paramètre à déterminer est donc $\theta = A$. Ensuite, on supposera que cet écart type est inconnu, le vecteur de paramètres à estimer sera donc $\boldsymbol{\theta} = \left(A\ \sigma^2\right)^{\mathrm{T}}$. On note $V(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) = f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$ la fonction de vraisemblance du paramètre $\boldsymbol{\theta}$ associée à l'observation $\mathbf{y}$.

3/ Écart type $\boldsymbol{\sigma}$ connu et $\boldsymbol{A}$ certain

Dans cette partie, A est une grandeur certaine mais inconnue et l'écart type σ est connu. Le paramètre à estimer est donc $\theta = A$.

3.1/ Donner l'expression de $V(A, \mathbf{y})$ en fonction de σ, x_n et y_n, $n = 1, \dots, N$.

3.2/ En déduire l'expression de $\hat{A}_{\mathrm{MV}}$, estimateur au sens du maximum de vraisemblance (MV) du paramètre A, en fonction de x_n et Y_n, $n = 1, \dots, N$.

3.3/ Vérifier que cet estimateur est non biaisé.

3.4/ Expliciter la variance σ^2_{MV} de l'erreur d'estimation.

Pour un estimateur non biaisé, la borne de Cramer Rao du paramètre A est définie par $\dfrac{-1}{\mathrm{E}\left[\dfrac{\partial^2}{\partial A^2} \ln V(A, \mathbf{Y})\right]}$.

3.5/ À quoi correspond la borne de Cramer Rao ?

3.6/ Expliciter la borne de Cramer Rao pour le problème étudié.

3.7/ L'estimateur du MV est-il un estimateur efficace du paramètre A ?

3.8/ En précisant clairement la démarche suivie, expliciter la ddp de l'estimateur $\hat{A}_{\mathrm{MV}}$.

3.9/ Expliciter la probabilité que $\left|\hat{A}_{\mathrm{MV}} - A\right| < \dfrac{u\sigma}{\sqrt{\sum_{n=1}^{N} x_n^2}}$, $u > 0$, en fonction de $g(u) = \int_{-\infty}^{u} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{\alpha^2}{2}\right) \mathrm{d}\alpha$.

3.10/ On donne l'évolution de $g(u)$ ci-dessous et on souhaite définir un intervalle de confiance à 99% permettant de garantir que la valeur exacte du paramètre A est dans cet intervalle avec une probabilité égale à 0,99. Expliciter cet intervalle.

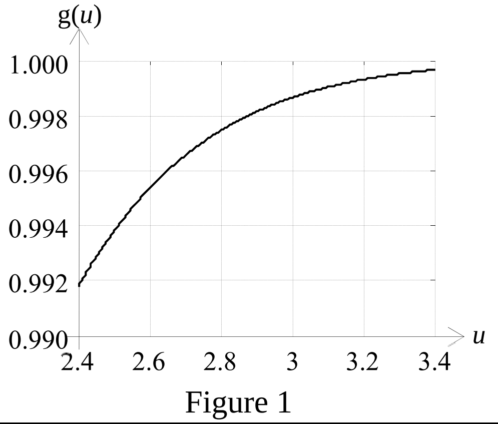


Figure 1

4/ Écart type $\boldsymbol{\sigma}$ connu et $\boldsymbol{A}$ aléatoire

On suppose maintenant que l'on dispose d'une information *a priori* sur le paramètre A et plus précisément que A est une VA gaussienne de moyenne m_A et d'écart type σ_A. On suppose de plus que les VA B_n, $n = 1, \dots, N$, et A sont indépendantes deux à deux. L'écart type σ est toujours connu.

4.1/ Rappeler la formule de Bayes (on prendra soin de préciser les notations).

4.2/ Expliciter la ddp conditionnelle, $f_{A/\mathbf{Y}=\mathbf{y}}(a)$, de A sachant que $\mathbf{Y}$ est fixé et égal à $\mathbf{y}$ (il n'est pas demandé d'expliciter les termes indépendants de a).

4.3/ En déduire l'estimateur au sens du maximum *a posteriori* (MAP), $\hat{A}_{MAP}$, de A. Expliciter $\hat{A}_{MAP}$ en fonction de $\hat{A}_{MV}$, σ_{MV}^2, m_A et σ_A^2.

4.4/ Commenter l'expression de l'estimateur lorsque $\sigma_A \to 0$ puis $\sigma_A \to \infty$.

5/ Écart type σ inconnu et A certain

Dans cette partie, A et σ sont des grandeurs certaines mais inconnues. Le paramètre à estimer est alors $\boldsymbol{\theta} = \left(A\, \sigma^2\right)^{\mathrm{T}}$.

5.1/ Expliciter l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance du paramètre $\boldsymbol{\theta}$, noté $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MV}} = \left(\hat{A}_{\mathrm{MV}}\ \hat{\sigma}^2{}_{\mathrm{MV}}\right)^{\mathrm{T}}$.

5.2/ Déterminer la moyenne de cet estimateur.

5.3/ En déduire un estimateur non biaisé de $\boldsymbol{\theta}$.

VI/ ESTIMATION LINÉAIRE EN MOYENNE QUADRATIQUE

Soient X et Y deux variables aléatoires (VA) scalaires et réelles, de moyenne respectivement m_X et m_Y, d'écart type respectivement σ_X et σ_Y, et de coefficient de corrélation ρ_{XY}. On s'intéresse tout d'abord au problème d'estimation linéaire en moyenne quadratique (ELMQ) de la VA X à partir de la VA Y. Soit $\hat{X}_{\mathrm{ELMQ}}$ cet estimateur.

1/ Donner la structure générale de $\hat{X}_{ELMQ}$.

2/ À quelle condition est-il non biaisé ?

3/ Expliciter l'erreur quadratique moyenne (EQM) en fonction des coefficients de l'estimateur.

4/ En partant de l'EQM et de la définition de l'ELMQ, vérifier que $\hat{X}_{\mathrm{ELMQ}} = m_X + \rho_{XY} \dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y}(Y - m_Y)$. Déterminer l'expression de l'EQM de l'ELMQ en fonction des caractéristiques statistiques des VA X et Y. La commenter.

5/ Retrouver ce résultat en appliquant le principe d'orthogonalité que l'on prendra soin de rappeler en précisant les notations.

Soit ϕ une variable aléatoire (va) uniformément répartie entre 0 et π.

6/ Expliciter la densité de probabilité (ddp) de cette VA.

On considère les VA $X = \sin(\phi)$ et $Y = \cos(\phi)$.

7/ Proposer un estimateur intuitif, $\hat{X}_{\mathrm{int}}$, de X en fonction de Y.

8/ Expliciter la moyenne et l'écart type des VA X et Y ainsi que leur coefficient de corrélation.

9/ Les VA X et Y sont-elles indépendantes ? Sont-elles corrélées ?

10/ Expliciter la ddp marginale des VA X et Y.

11/ Donner l'expression de $\hat{X}_{\mathrm{ELMQ}}$ en fonction de Y.

On rappelle que l'estimée en moyenne quadratique de X en fonction de Y est $\hat{X}_{\mathrm{MQ}} = E[X/Y]$.

12/ Donner l'expression de $\hat{X}_{\mathrm{MQ}}$ pour l'exemple considéré. Commenter le résultat.

13/ Comparer les deux estimateurs étudiés.

VII/ LOI DE PARETO

Dans cet exercice, on s'intéresse à la loi de Pareto qui traduit le fait qu'environ 80 % des effets est produit par environ 20 % des causes. Elle est encore appelée loi des 80/20 ou 20/80. On considère une variable aléatoire (VA) X scalaire et réelle qui suit une loi de Pareto de paramètres $\theta > 0$ et $x_{\min} > 0$. Sa densité de probabilité (ddp) $f_X(x)$ est alors définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \theta \dfrac{x_{\min}^{\theta}}{x^{\theta+1}} \text{ si } x \geq x_{\min}, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1/ Justifier pourquoi $f_X(x)$ est bien une ddp.

2/ Représenter l'allure de $f_X(x)$.

3/ Expliciter la fonction de répartition de la VA X et représenter son allure.

4/ Expliciter la valeur moyenne, m_X, de la VA X et discuter de son existence. (Indication : factoriser la fonction à intégrer pour faire apparaître un ddp.)

5/ On considère la VA $Y = X/x_{\min}$. Après avoir rappelé les résultats concernant le changement de VA scalaires, expliciter la ddp de la VA Y.

On considère que le paramètre $x_{\min}$ est connu et on s'intéresse à l'estimation du paramètre θ à partir de N observations $x_1, x_2, ..., x_N$ issues de $N > 2$ VA indépendantes et identiquement distribuées (*iid*) X_n, $n = 1, 2, ..., N$, suivant une loi de Pareto de paramètres $\theta > 0$ et $x_{\min} > 0$. Sans pour autant restreindre l'étude, on suppose dans toute la suite que $x_{\min} = 1$, ce qui revient encore à considérer une va normalisée.

Dans un premier temps, on suppose que θ est un paramètre certain mais inconnu.

6/ Expliciter la ddp conjointe des VA X_n, $n = 1, 2, ..., N$.

On considère le vecteur aléatoire $X = \left(X_1, X_2, ..., X_N\right)^{\mathrm{T}}$.

7/ Expliciter $f_X(x)$, ddp de la VA X.

8/ Donner l'expression de $\hat{\theta}_{MV}$, estimateur au sens du maximum de vraisemblance (MV) qui, par définition, est la valeur de θ qui maximise $V(\theta, x) = f_X(x)$, fonction de vraisemblance du paramètre θ associée à l'observation x, ou encore $L(\theta, x) = \ln\left(f_X(x)\right)$, log-vraisemblance du paramètre θ associée à l'observation x.

9/ Question de cours : donner la démarche qui permet d'aboutir à l'expression de l'estimateur au sens du MV lorsque $N = 1$.

Une VA scalaire et réelle de loi gamma $\Gamma(a, k)$, $a > 0$ et $k > 0$, a une ddp

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a^k}{(k-1)!} \exp(-ax) x^{k-1} \text{ si } x \geq 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Sa fonction caractéristique est $\varphi(u) = \left(1 - j\,u/a\right)^{-k}$.

10/ Rappeler la définition de la fonction caractéristique d'une VA quelconque.

11/ Soient Z_1 et Z_2 deux VA indépendantes de loi gamma $\Gamma(a, k_1)$ et $\Gamma(a, k_2)$. Montrer que la VA $Z = Z_1 + Z_2$ suit une loi gamma $\Gamma(a, k_1 + k_2)$.

12/ On considère la VA $Z_n = \ln X_n$, X_n suivant une loi de Pareto de paramètres $\theta > 0$ et $x_{\min} = 1$. Montrer que la VA Z_n suit une loi gamma dont on déterminera les paramètres.

13/ On considère la VA $U = \sum_{n=1}^{N} Z_n$ avec $Z_n = \ln X_n$ définie précédemment. Montrer que la VA U suit une loi gamma de paramètres θ et N : $\Gamma(\theta, N)$.

14/ Déterminer la moyenne de la VA $1/U$ ainsi que celle de la VA $1/U^2$. (Indication : factoriser la fonction à intégrer pour faire apparaître un ddp.) Vérifier que la variance de la VA $1/U$ est $\dfrac{\theta^2}{(N-1)^2(N-2)}$.

15/ Déterminer le biais de l'estimateur $\hat{\theta}_{\mathrm{MV}}$.

16/ En déduire un estimateur non biaisé de θ, noté $\hat{\theta}_{NB}$. Expliciter la variance de cet estimateur. Commenter le résultat lorsque $N \to +\infty$.

17/ La borne de Cramer-Rao (BCR) associée à un estimateur non biaisé d'un paramètre θ est

$$\mathrm{BCR}(\theta) = \frac{-1}{\mathrm{E}\left[\dfrac{\partial^2 L(\theta, X)}{\partial \theta^2}\right]}.$$

Expliciter cette borne. L'estimateur $\hat{\theta}_{NB}$ est-il efficace ?

On suppose maintenant que l'on dispose d'une information *a priori* sur le paramètre à estimer et, plus exactement, que c'est une VA de loi $\Gamma(\lambda, 1)$. Sa ddp est alors

$$f_\Theta(\theta) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda\theta) \text{ si } \theta \geq 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Pour, $n = 1, 2, ..., N$, on a

$$f_{X_n/\Theta=\theta}(x_n) = \begin{cases} \theta \dfrac{1}{x_n^{\theta+1}} \text{ si } x_n \geq 1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

18/ Montrer que $f_{\Theta/X=x}(\theta)$, ddp conditionnelle de Θ sachant que la VA X est fixée et égal à x, est une loi gamma de paramètres $\lambda + \sum_{n=1}^{N} \ln x_n$ et $N+1$. Indication : $\left(\prod_{n=1}^{N} x_i\right)^{\theta+1} = \exp\left((\theta+1)\sum_{n=1}^{N} \ln x_n\right)$.

19/ Expliciter l'estimateur au sens du maximum *a posteriori* (MAP) $\hat{\theta}_{\mathrm{MAP}}$ et étudier son comportement lorsque $N \to +\infty$.

20/ Expliciter la moyenne conditionnelle $E[\Theta / X = x]$.

21/ Expliciter l'estimateur en moyenne quadratique (MQ) du paramètre θ, noté $\hat{\theta}_{\mathrm{MQ}}$. Analyser le comportement de cet estimateur pour N *grand*.

22/ Question de cours : donner la démarche qui permet d'aboutir à l'expression de l'estimateur en moyenne quadratique.

VIII/ PRÉDICTION

Soit $x[n]$ un signal aléatoire (SA) à temps discret, scalaire, réel, centré et stationnaire au sens strict. On note $\gamma_{xx}[k]$ sa fonction d'autocorrélation.

1/ Rappeler la définition d'un SA stationnaire au sens strict. Donner un exemple de SA qui n'est pas stationnaire.

2/ Rappeler la définition d'un SA ergodique au sens strict. Donner un exemple de SA qui n'est pas ergodique.

3/ Rappeler la définition de $\gamma_{xx}[k]$.

4/ Rappeler la définition de la densité spectrale de puissance (dsp) , $\Gamma_{xx}(f)$, du SA $x[n]$. Préciser les principales propriétés de $\Gamma_{xx}(f)$.

5/ Rappeler la formule des interférences dans le cas général. (Les grandeurs introduites devront être précisées.)

On cherche à prédire la valeur du SA à l'instant n, $x[n]$, à partir de ses K valeurs précédentes $x[n-k]$, $k = 1, 2, \ldots, K$, sous forme d'une combinaison linéaire. Ainsi le SA prédit à l'instant n se met sous la forme

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=1}^{K} h[k]x[n-k]. \tag{1}$$

6/ Préciser les propriétés de l'opérateur qui permet de passer du SA $x[n]$ au SA $\hat{x}[n]$. Que représentent les coefficients $h[k]$, $k = 1, 2, \ldots, K$?

7/ Cet estimateur est-il biaisé ?

On note $\tilde{x}[n]$ l'erreur de prédiction. On cherche les coefficients $h[k]$, $k = 1, 2, \ldots, K$, minimisant la puissance de l'erreur de prédiction $P = \mathrm{E}\left[\tilde{x}[n]^2\right]$, où $\mathrm{E}[Y]$ est l'espérance de la variable aléatoire Y.

8/ Quel nom porte l'estimateur ainsi défini ?

9/ Justifier pourquoi les coefficients $h[k]$, $k = 1, 2, \ldots, K$, vérifient le système d'équations

$$\mathrm{E}[(\hat{x}[n] - x[n])x[n-k]] = 0\,,\ \forall\, k = 1, 2, \ldots, K\,. \tag{2}$$

10/ Mettre le système d'équations (2) sous forme matricielle faisant intervenir les coefficients $h[k]$, $k = 1, 2, \ldots, K$, et en prenant soin de préciser les vecteurs et la matrice introduits. Quelle propriété possède la matrice introduite ?

11/ Expliciter la puissance minimale de l'erreur en fonction de $h[k]$, $k = 1, \ldots, K$, définis précédemment, et de $\gamma_{xx}[k]$, $k = 0, \ldots, K$.

12/ On suppose de plus que le SA $x[n]$ est ergodique. Préciser comment estimer la fonction d'autocorrélation en fonction d'une trajectoire tronquée du SA $x[n]$.

13/ On suppose que la dsp du SA $x[n]$ est non nulle. Le SA $x[n]$ est filtré par un filtre linéaire de réponse en fréquence $H(f) = 1\big/\sqrt{\Gamma_{xx}(f)}$. Quelle est la propriété du signal de sortie ?

VIII/ ÉLÉMENTS DE CORRECTION DES EXERCICES

Variables aléatoires

1/ • $p_1(x) < 0$ pour certains x → $p_1(x)$ ne peut pas être une ddp

• Si $p_2(x) \geq 0 \; \forall x$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} p_2(x)\,dx > 1$ → $p_2(x)$ ne peut pas être une ddp

Si $\int_{-\infty}^{+\infty} p_2(x)\,dx = 1$ alors $\exists\, x / p_2(x) < 0$

→ $p_2(x)$ ne peut pas être une ddp.

• $p_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}\right)$ avec $\sigma \simeq 1$ (rq : on n'a pas d'information pour $|x|>1$)

→ $p_3(x)$ peut être une ddp ($\mathcal{N}$).

2/ • Les ddp présentent un axe de symétrie qui est encore la valeur moyenne des VA (m_i) → $m_1 \simeq m_2 \simeq 0$ et $m_3 = 4$

• L'écart type mesure la dispersion d'une VA de part et d'autre sa valeur moyenne → $\sigma_1 < \sigma_3 < \sigma_2$

• $P_i = \Pr[X_i \in [3,5]] = \int_3^5 f_i(x)\,dx$ → $P_1 < P_2 < P_3$

3/ • biais $= E[\hat{\theta} - \theta]$ avec ici $\theta = 4$

$= m_i - 4$ → $b_3 \simeq 0 < b_1 \simeq b_2 = -4$ → $b_1 \simeq b_2 < b_3 \simeq 0$

• → 3ᵉ estimateur non biaisé

• $\sigma_1 < \sigma_3 < \sigma_2$ (d'après 2)

Borne de Cramer Rao

1/ • $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\theta)\, dx = 1$ car $f(x,\theta)$ est une ddp

• $\frac{d}{d\theta}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\theta)\, dx\right) = 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{\partial f(x,\theta)/\partial\theta}{f(x,\theta)}}_{= \frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta}} f(x,\theta)\, dx \rightarrow$

$$E\left[\frac{\partial \ln f(X,\theta)}{\partial\theta}\right] = 0$$

• Et en dérivant une nouvelle fois :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \ln f(x,\theta)}{\partial\theta^2} f(x,\theta)\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2 f(x,\theta)\, dx = 0 \rightarrow$$

$$E\left[\frac{\partial^2 \ln f(X,\theta)}{\partial\theta^2}\right] = - E\left[\left(\frac{\partial \ln f(X,\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right]$$

2/ $\theta\, E\left[\frac{\partial \ln f(X,\theta)}{\partial\theta}\right] = 0 \underset{\theta \text{ certain}}{=} E\left[\theta \frac{\partial \ln f(X,\theta)}{\partial\theta}\right]$

3/ variance $= E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X,\theta) - \overbrace{E\left[\frac{\partial \ln f(X,\theta)}{\partial\theta}\right]}^{=0}\right)^2\right]$

$$= E\left[\left(\frac{\partial \ln f(X,\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2 f(x,\theta)\, dx$$

4/ • $\frac{d}{d\theta} E[h(X)] = \frac{d}{d\theta}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f(x,\theta)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \underbrace{\frac{\partial f(x,\theta)/\partial\theta}{f(x,\theta)}}_{= \frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta}} f(x,\theta)\, dx$

$$= E\left[h(X) \frac{\partial \ln f(X,\theta)}{\partial\theta}\right]$$

$$E\left[E[h(X)] \frac{\partial \ln f(X,\theta)}{\partial\theta}\right] = E[h(X)]\, E\left[\frac{\partial \ln f(X,\theta)}{\partial\theta}\right] = 0 \rightarrow$$

$$\frac{d E[h(X)]}{d\theta} = E\left[(h(X) - E[h(X)])\frac{\partial \ln f(X,\theta)}{\partial\theta}\right]$$

5/ $\left(\frac{d E[h(X)]}{d\theta}\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} [h(x) - E[h(X)]] \frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta} f(x,\theta)\, dx\right)^2$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} [h(x) - E[h(X)]]^2 f(x,\theta)\, dx \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2 f(x,\theta)\, dx$$

$$\leq \sigma^2 \underbrace{E\left[\left(\frac{\partial \ln f(X,\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right]}_{\geq 0} = -\sigma^2 \underbrace{E\left[\frac{\partial^2 \ln f(X,\theta)}{\partial\theta^2}\right]}_{\leq 0}$$

$$\rightarrow \quad \sigma^2 \geq - \frac{\left(\frac{d E[h(X)]}{d\theta} \right)^2}{E\left[\frac{\partial^2 \ln f(X,\theta)}{\partial \theta^2} \right]} = \text{borne minimale}$$

6/ Si estimateur non biaisé : $E[h(X)] = \theta \rightarrow$

$$\sigma^2 \geq \frac{-1}{E\left[\frac{\partial^2 \ln f(X,\theta)}{\partial \theta^2} \right]}$$

$\rightarrow$ la borne ne dépend que de la ddp de la VA X.

Estimation

1/ $B : \mathcal{N}(0,\sigma_B^2)$ $\qquad f_B(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_B} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{b^2}{\sigma_B^2}\right)$

2/ $\left.\begin{array}{l} + X : \mathcal{N}(0,\sigma_X^2) \\ + X \text{ et } B \text{ indépendants} \end{array}\right\} \Rightarrow f_{XB}(x,b) = f_X(x)\, f_B(b)$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_B} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_X^2} + \frac{b^2}{\sigma_B^2}\right)\right)$$

3/ $Y = X + B \qquad + X = x \Rightarrow B \rightarrow Y = x + B : \mathcal{N}(x, \sigma_B^2) \Rightarrow$

$f_{Y/X=x}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_B} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y-x)^2}{\sigma_B^2}\right)$ car X et B indépendants

4/ • $f_{Y/X=x}(y)$ maximum pour $x = y \Rightarrow \hat{X}_{MV} = Y$

• erreur d'estimation $= \tilde{X} = \hat{X} - X \rightarrow \tilde{X}_{MV} = Y - X = B \rightarrow E[\tilde{X}_{MV}] = 0$

$\Rightarrow$ biais moyen nul $\Rightarrow$ estimateur non biaisé

• $\sigma^2_{\tilde{X}_{MV}} = E[\tilde{X}_{MV}^2] = E[B^2] = \sigma_B^2 \Rightarrow \sigma_{\tilde{X}_{MV}} = \sigma_B$

5/ $f_{X/Y=y}(x) = f_{Y/X=x}(y)\, \frac{f_X(x)}{f_Y(x)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{indépendant de } x}}{c} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(y-x)^2}{\sigma_B^2} + \frac{x^2}{\sigma_X^2}\right)\right)$

6/ • $f_{X/Y=y}(x)$ maximum $\Leftrightarrow J = \frac{(y-x)^2}{\sigma_B^2} + \frac{x^2}{\sigma_X^2}$ minimum

CNS $\frac{dJ}{dx} = 0$, or $\frac{dJ}{dx} = -2\,\frac{y-x}{\sigma_B^2} + 2\,\frac{x}{\sigma_X^2} \rightarrow x = \frac{y/\sigma_B^2}{\frac{1}{\sigma_X^2} + \frac{1}{\sigma_B^2}} \rightarrow$

$\hat{X}_{MAP} = \frac{\frac{Y}{\sigma_B^2}}{\frac{1}{\sigma_X^2} + \frac{1}{\sigma_B^2}}$

• $\tilde{X}_{MAP} = \frac{(X+B)/\sigma_B^2}{1/\sigma_X^2 + 1/\sigma_B^2} - X = \frac{B/\sigma_B^2 - X/\sigma_X^2}{1/\sigma_X^2 + 1/\sigma_B^2} \rightarrow E[\tilde{X}_{MAP}] = 0 \rightarrow$ estimateur non biaisé

• $\sigma^2_{\tilde{X}_{MAP}} \underset{\substack{\uparrow \\ X \text{ et } B \text{ indépendants}}}{=} \left(1/\sigma_X^2 + 1/\sigma_B^2\right)^{-1} \rightarrow \begin{cases} \sigma_{\tilde{X}_{MAP}} < \sigma_X \\ \sigma_{\tilde{X}_{MAP}} < \sigma_B \end{cases}$

7/ • X et Y $\mathcal{N}$ + indépendants $\rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \mathcal{N}$ et $\begin{array}{l} f_{Y/X=x}(y) : \mathcal{N} \\ f_{X/Y=y}(y) : \mathcal{N} \end{array}$

• Soit $m_{X/y} = E[X/Y=y]$

• $f_{X/Y=y}(x) = c' \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x - m_{X/y})^2}{\sigma_{X/y}^2}\right)$

D'après 5/ $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{\sigma_{X/y}^2} = \frac{1}{\sigma_X^2} + \frac{1}{\sigma_B^2} \\ -\frac{2xy}{\sigma_B^2} = -\frac{2x\, m_{X/y}}{\sigma_{X/y}^2} \end{array}\right\} \rightarrow m_{X/y} = \frac{y/\sigma_B^2}{1/\sigma_X^2 + 1/\sigma_B^2} \rightarrow \hat{X}_{MQ} = \hat{X}_{MAP}$

8/ $y(t) = x(t) + \underset{\text{bruit "faible"}}{b(t)} \simeq x(t)$ $\rightarrow$ $\hat{x}_1(t) = y(t)$ $\Rightarrow$ on n'exploite que les observations

9/ $y(t) = x(t) + \underset{\text{bruit "grand"}}{b(t)} \simeq b(t)$ $\rightarrow$ $\hat{x}_2(t) = m_x = 0$ $\Rightarrow$ on n'exploite que l'a priori

10/ $\hat{x}_{MV}(t) \underset{4/}{=} y(t) = \hat{x}_1(t)$

11/ $\hat{x}_{MAP}(t) \underset{6/}{=} \dfrac{y(t)/\sigma_b^2}{1/\sigma_x^2 + 1/\sigma_b^2} = \dfrac{y(t)/\sigma_b^2 + m_x/\sigma_x^2}{1/\sigma_b^2 + 1/\sigma_x^2}$ = barycentre

$\Rightarrow$ prend en compte les observations + a priori, avec pondération fonction de la précision

12/ $\hat{x}_{MQ}(t) \underset{6/}{=} \hat{x}_{MAP}(t)$

13/ • $\hat{x}_{MQ}(t) = \hat{x}_{MAP}(t)$

• Tous les estimateurs sont non biaisés

• $\sigma_{MAP} < \sigma_{MV}$

$\rightarrow$ MAP = MQ meilleur que MV.

Estimateur du MV

1/ • $B \longrightarrow Y = H\theta + B \rightarrow$ changement de VA.

• $f_Y(y) = f_B(b)\, |J| \big|_{b = y - H\theta}$ $\quad J = I \rightarrow |J| = 1$

$= f_B(y - H\theta) = \dfrac{1}{(2\pi)^{m/2}\sqrt{\det \Gamma_{BB}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(y - H\theta)^T \Gamma_{BB}^{-1} (y - H\theta)\right\}$

2/ $\underset{n \times m}{H^T}\ \underset{m \times m}{\Gamma_{BB}^{-1}}\ \underset{m \times n}{H}$: $n \times n$ $\rightarrow$ CN pour que $H^T \Gamma_{BB}^{-1} H$ soit inversible :

$m \geq n$

$\rightarrow$ il faut plus d'observations / de mesures que d'inconnues.

3/ $\hat{\theta} = \arg\max_\theta V(\theta, y) = \arg\max_\theta f_Y(y) = \arg\min_\theta J(\theta)$

avec $J(\theta) = \frac{1}{2}(H\theta - y)^T \Gamma_{BB}^{-1} (H\theta - y)$

or $\Gamma_{BB} > 0 \rightarrow$ CNS min $J(\theta)$: $\nabla_J(\theta) = H^T \Gamma_{BB}^{-1}(H\theta - y) = 0$

$\rightarrow \underline{\hat{\theta} = (H^T \Gamma_{BB}^{-1} H)^{-1} H^T \Gamma_{BB}^{-1} Y}$

4/ • $E[\hat{\theta}] = (H^T \Gamma_{BB}^{-1} H)^{-1} H^T \Gamma_{BB}^{-1} E[Y] \underset{\uparrow}{=} \theta \rightarrow$ estimateur non biaisé

$E[Y] = H\theta$ car $E[B] = 0$

• $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta = (H^T \Gamma_{BB}^{-1} H)^{-1} H^T \Gamma_{BB}^{-1} B$. $\quad$ • $E[\tilde{\theta}] = 0$

• $E[\tilde{\theta}\, \tilde{\theta}^T]$ = variance de l'estimateur

$= (H^T \Gamma_{BB}^{-1} H)^{-1}$

5/ B_k, $k = 1 \dots K$, indépendants $\underset{\uparrow}{\Rightarrow}$ Y_k, $k = 1 \dots K$, indépendants

$Y_k = H\theta + B_k$

$\rightarrow f_{Y_1 \dots Y_K}(y_1, \dots, y_K) = \prod_{k=1}^{K} f_{Y_k}(y_k)$

$= \dfrac{1}{(2\pi)^{mK/2} (\det \Gamma_{BB})^{K/2}} \exp\Big\{\underbrace{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K} (y_k - H\theta)^T \Gamma_{BB}^{-1} (y_k - H\theta)}_{J_K(\theta)}\Big\}$

6/ • $\hat{\theta}_K = \arg\max_\theta f_{Y_1 \dots Y_K}(y_1, \dots, y_K) = \arg\min_\theta J_K(\theta)$

• CNS $\nabla_{J_K}(\theta) = \sum_{k=1}^{K} H^T \Gamma_{BB}^{-1}(H\theta - y_k) = 0 \rightarrow$

$\hat{\theta}_K = (H^T \Gamma_{BB}^{-1} H)^{-1} H^T \Gamma_{BB}^{-1} \sum_{k=1}^{K} Y_k / K$

= moyenne des estimateurs du MV obtenus à partir des observations Y_k, $k = 1 \dots K$.

7/ • $E[\hat{\theta}_K] \underset{\uparrow}{=} \theta$ → estimateur non biaisé

$E[Y_k] = H\theta$

• $\tilde{\theta}_K = (H^T \Gamma_{BB}^{-1} H)^{-1} H^T \Gamma_{BB}^{-1} \sum_{k=1}^{K} B_k / K.$

• $E[\tilde{\theta}_k \tilde{\theta}_K^T]$ = variance de l'estimateur $\hat{\theta}_K$

• B_k, $k = 1 \dots K$, centrés et indépendants $\Rightarrow E[B_i B_j^T] = \delta_{i-j} \Gamma_{BB}$

$\rightarrow \sum_{i,j=1}^{K} E[B_i B_j^T] = \sum_{k=1}^{K} E[B_k B_k^T] = K \Gamma_{BB} \rightarrow$

$E[\tilde{\theta}_k \tilde{\theta}_K^T] = (H^T \Gamma_{BB}^{-1} H)^{-1} / K$ → variance divisée par K.

Estimation

1/ $f_{B_n}(b_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{b_n^2}{\sigma^2}\right)$

2/ • $B_n \rightarrow Y_n = A x_n + B_n$: changement VA avec transformation linéaire : B_n $\mathcal{N}(0,\sigma^2) \rightarrow Y_n : \mathcal{N}(A x_n, \sigma^2)$

• B_n indépendants $\Rightarrow Y_n$ indépendants $\rightarrow$

$$f_Y(y) = f_{Y_1 \dots Y_N}(y_1, \dots, y_N) = \prod_{n=1}^{N} f_{Y_n}(y_n) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma^N} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\sum_{n=1}^{N}(y_n - A x_n)^2}{\sigma^2}\right)$$

3/ • $V(A,y) = f_Y(y)$

• $\left.\frac{\partial V(A,y)}{\partial A}\right|_{A=\hat{A}_{MV}} = 0 \rightarrow \sum_{n=1}^{N} x_n (y_n - A x_n) = 0 \Rightarrow \hat{A}_{MV} = \frac{\sum_{n=1}^{N} x_n Y_n}{\sum_{n=1}^{N} x_n^2}$

• $E[\hat{A}_{MV}] = \frac{\sum_{n=1}^{N} x_n E[Y_n]}{\sum_{n=1}^{N} x_n^2} = A \rightarrow$ estimateur non biaisé

• $\hat{A}_{MV} - A = \frac{\sum_{n=1}^{N} x_n B_n}{\sum_{n=1}^{N} x_n^2}$ $\qquad \sigma_{MV}^2 = E[(\hat{A}_{MV} - A)^2] \underset{\substack{\uparrow \\ B_n \text{ indépendants}}}{=} \frac{\sum_{n=1}^{N} x_n^2 E[B_n^2]}{\left(\sum_{n=1}^{N} x_n^2\right)^2}$

$\Rightarrow \sigma_{MV}^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{n=1}^{N} x_n^2}$

• borne de Cramer Rao = limite inférieure de la variance de l'erreur d'estimation

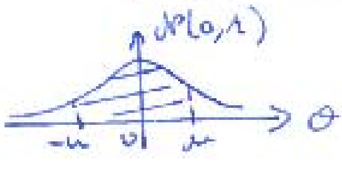
• $\ln V(A,Y) = -\frac{N}{2}\ln(2\pi) - N \ln\sigma - \frac{1}{2}\frac{\sum_{n=1}^{N}(Y_n - A x_n)^2}{\sigma^2}$

$\frac{\partial^2 V(A,Y)}{\partial A^2} = -\frac{\sum_{n=1}^{N} x_n^2}{\sigma^2} \rightarrow$ borne de Cramer Rao $= \frac{\sigma^2}{\sum x_n^2} = \sigma_{MV}^2$

• l'estimateur du MV atteint la borne de Cramer Rao $\Rightarrow$ estimateur efficace

• Y_n $\mathcal{N}$ et $\hat{A}_{MV}$ est une combinaison linéaire de VA $\mathcal{N} \Rightarrow$ $\hat{A}_{MV}$ $\mathcal{N}(A, \sigma_{MV}^2)$

• $\Pr\left[|\hat{A}_{MV} - A| < \frac{u\sigma}{\sqrt{\sum_{n=1}^{N} x_n^2}}\right] = \int_{A - u\frac{\sigma}{\sqrt{\sum_{n=1}^{N} x_n^2}}}^{A + \frac{u\sigma}{\sqrt{\sum_{n=1}^{N} x_n^2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{MV}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(a-A)^2}{\sigma_{MV}^2}\right) da$



$\theta \overset{\uparrow}{=} \frac{a-A}{\sigma_{MV}}$ $\qquad \int_{-u}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\theta^2\right) d\theta$

$= 2g(u) - 1$

• $2g(u) - 1 = 0.99 \Rightarrow g(u) = 0.995 \Rightarrow u \simeq 2{,}55$.

$\Rightarrow$ intervalle $[A - 2{,}55\,\sigma_{MV}, A + 2{,}55\,\sigma_{MV}]$.

4/ • Soient X et Y des VA $\rightarrow f_{Y/X=x}(y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$

• $f_{A/Y=y}(a) = \frac{f_{Y/A=a}(y)\, f_A(a)}{f_Y(y)} \underset{\uparrow}{=} \alpha(y) \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sum_{n=1}^{N}(y_n - a x_n)^2}{\sigma^2} + \frac{(a-m_A)^2}{\sigma_A^2}\right)\right\}$

A et Y_n indépendants

• $\hat{A}_{MAP} = \arg\max_a f_{A/Y=y}(a)$

$$= \frac{\frac{\sum_{n=1}^{N} x_n Y_n}{\sigma^2} + \frac{m_A}{\sigma_A^2}}{\frac{\sum_{n=1}^{N} x_n^2}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_A^2}} = \frac{\frac{\hat{A}_{MV}}{\sigma_{MV}^2} + \frac{m_A}{\sigma_A^2}}{\frac{1}{\sigma_{MV}^2} + \frac{1}{\sigma_A^2}} = \hat{A}_{MAP}$$

• si $\sigma_A \rightarrow 0$ $\quad \hat{A}_{MAP} \rightarrow m_A$ $\quad$ c-à-d information a priori grande et les observations apportent peu d'information

• si $\sigma_A \rightarrow +\infty$ $\quad \hat{A}_{MAP} \rightarrow \hat{A}_{MV}$ $\quad$ c-à-d information a priori faible

5/ • $\hat{\theta}_{MV} = \arg\max_{\theta = \binom{A}{\sigma^2}} \ln V(\theta, Y) = \arg\max_{(A,\sigma^2)} -N\ln\sigma - \frac{1}{2}\frac{\sum_{n=1}^{N}(Y_n - Ax_n)^2}{\sigma^2}$

• $\frac{\partial V(\theta,Y)}{\partial A} = 0 = \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n(Y_n - Ax_n)}{\sigma^2} \rightarrow \hat{A}_{MV} = \frac{\sum_{n=1}^{N} x_n Y_n}{\sum_{n=1}^{N} x_n^2}$

• $\frac{\partial V(\theta,Y)}{\partial \sigma^2} = 0 = -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{(Y_n - Ax_n)^2}{\sigma^4}$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}_{MV}^2 = \frac{\sum_{n=1}^{N}(Y_n - \hat{A}_{MV}x_n)^2}{N}$$

• D'après 3/ $E[\hat{A}_{MV}] = m_A \rightarrow$ non biaisé

• $\hat{\sigma}_{MV}^2 = \frac{\sum_{n=1}^{N} Y_n^2 - \hat{A}_{MV}^2 \sum_{n=1}^{N} x_n^2}{N}$ avec $\begin{cases} E[Y_n^2] = A^2 x_n^2 + \sigma^2 \\ E[\hat{A}_{MV}^2] = A^2 + \sigma_{MV}^2 \end{cases}$

$\rightarrow E[\hat{\sigma}_{MV}^2] = \frac{A^2 \sum_{n=1}^{N} x_n^2 + N\sigma^2 - A^2\sum_{n=1}^{N} x_n^2 - \sigma^2}{N}$

$= \frac{N-1}{N}\sigma^2 \neq \sigma^2 \rightarrow$ estimateur biaisé

$$\hat{\theta}_{\text{non biaisé}} = \begin{pmatrix} \hat{A}_{MV} \\ \frac{N}{N-1}\hat{\theta}_{MV} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sum_{n=1}^{N} x_n Y_n}{\sum_{n=1}^{N} x_n^2} \\ \frac{\sum_{n=1}^{N}(Y_n - \hat{A}_{MV}x_n)^2}{N-1} \end{pmatrix}$$

Estimation

1/ $\hat{X}_{ELMQ} = \alpha Y + \beta$

2/ $E[\hat{X}_{ELMQ}] = E[X] = m_X$ si estimateur non biaisé
$= \alpha m_Y + \beta$ $\Big\} \Rightarrow \beta = m_X - \alpha m_Y$

3/. $\tilde{X}_{ELMQ} = \hat{X}_{ELMQ} - X = \alpha Y + \beta - X = \alpha(Y - m_Y) - (X - m_X) + (\beta - m_X + \alpha m_Y)$

- $E[\tilde{X}^2_{ELMQ}] = EQM \underset{\uparrow}{=} \alpha^2 \sigma_Y^2 + \sigma_X^2 - 2\alpha \rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y + (\beta - m_X + \alpha m_Y)^2$

$Y - m_Y$, $X - m_X$ $\Big\}$ VA centrées

4/. EQM = forme quadratique en α et β avec coefficients α^2 et $\beta^2 > 0$

- EQM min : CNS $\frac{\partial EQM}{\partial \alpha} = 0$ et $\frac{\partial EQM}{\partial \beta} = 0$
- $\frac{\partial EQM}{\partial \beta} = 0 = 2(\beta - m_X + \alpha m_Y) \rightarrow \beta = m_X - \alpha m_Y \rightarrow$ estimateur non biaisé
- $\frac{\partial EQM}{\partial \alpha} = 0 = 2\alpha\sigma_Y^2 - 2\rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y + 2m_Y(\beta - m_X + \alpha m_Y) \longrightarrow \alpha = \rho_{XY}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$

$\Rightarrow \hat{X}_{ELMQ} = m_X + \rho_{XY}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(Y - m_Y)$

- $EQM\,\min = (1 - \rho_{XY}^2)\,\sigma_X^2$
- rq : si $\rho_{XY} = \pm 1$ $\quad EQM\,\min = 0$
$\Updownarrow$
$aX + bY = c$
$(ab \neq 0)$

5/. ELMQ = $\underbrace{\text{EL non biaisé}}$ + principe d'orthogonalité
$\hookrightarrow E[\tilde{X}_{ELMQ}\,Y] = 0$

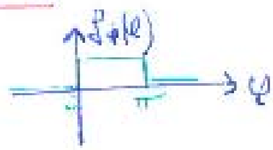
$\Rightarrow \tilde{X}_{ELMQ} = \alpha(Y - m_Y) - (X - m_X)$

1, 2, 3/

- $E[\tilde{X}_{ELMQ}\,Y] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{biais nul}}}{=} E[\tilde{X}_{ELMQ}(Y - m_Y)] = E[[\alpha(Y - m_Y) - (X - m_X)](Y - m_Y)]$
$= \alpha\sigma_Y^2 - \rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y = 0$
$\Rightarrow \alpha = \rho_{XY}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$

$\Rightarrow \hat{X}_{ELMQ} = m_X + \rho_{XY}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(Y - m_Y)$

6/ $f_\phi(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{si } \varphi \in [0, \pi) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



7/ $\hat{X}_{int} = \sqrt{1 - Y^2}$ $\qquad$ rq : $\hat{X}_{int} = X \rightarrow$ pas d'erreur d'estimation

8/ • $m_X = E[X] = E[\sin\phi] = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\varphi \, d\varphi = \frac{1}{\pi}\cos\varphi\Big|_\pi^0 = \frac{2}{\pi} = m_X$

• $m_Y = E[Y] = E[\cos\phi] = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\varphi \, d\varphi = \frac{1}{\pi}\sin\varphi\Big|_0^\pi = 0 = m_Y$

• $\sigma_Y^2 = E[(Y-m_Y)^2] = E[Y^2 = \cos^2\phi] = E\left[\frac{1+\cos 2\phi}{2}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_0^\pi \cos 2\varphi \, d\varphi}_{=0}$

$\rightarrow \sigma_Y^2 = \frac{1}{2}$ et $\sigma_Y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

• $E[X^2 = 1 - Y^2] = \frac{1}{2} \rightarrow \sigma_X^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \rightarrow \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}}$

• $E[XY = \cos\phi\sin\phi] = \frac{1}{2}E[\sin 2\phi] = \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_0^\pi \sin 2\varphi \, d\varphi}_{=0} = 0 \rightarrow$

$$\rho_{XY} = \frac{E[XY] - m_X m_Y}{\sigma_X \sigma_Y} = 0 = \rho_{XY}$$

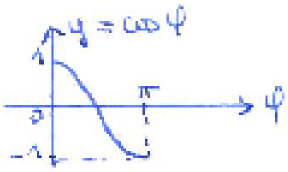
9/ Les VA ne sont pas indépendantes car $X^2+Y^2=1$ / $X = \sqrt{1-Y^2}$. Elles sont cependant décorrélées ($\rho_{XY} = 0$).

10/ • 

• $f_X(x) = \sum_{i=1}^{2} f_\phi(\varphi)\frac{1}{\left|\frac{dx}{d\varphi}\right|}\Bigg|_{\varphi=\varphi_i / \sin\varphi_i = x}$

• $\frac{dx}{d\varphi} = \cos\varphi$, $\left|\frac{dx}{d\varphi}\right| = \sqrt{1-x^2}$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in [0,1[\\ 0 \text{ si } x \notin [0,1] \end{cases}$$

• 

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} & \text{si } y \in]-1,1[\\ 0 \text{ si } y \notin [-1,1] \end{cases}$$

$\left|\frac{dy}{d\varphi}\right| = |\sin\varphi|$

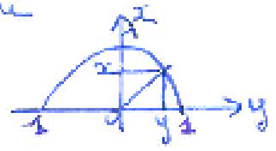
11/ $\hat{X}_{ELMQ} \underset{\rho_{XY}}{=} m_X = \frac{2}{\pi}$ → indépendant de Y. $EQM_{min} = \sigma_X^2$

12/ • $\hat{X}_{MQ}$ = estimateur de X qui minimise $EQM = E[(\hat{X}-X)^2]$ avec $\hat{X} = h(Y)$

or si $\hat{X} = \sqrt{1-Y^2}$ $\hat{X} - X = 0 \rightarrow EQM \min = 0$

$\rightarrow \hat{X}_{MQ} = \sqrt{1-Y^2}$

ou

• 

• si $Y = y \rightarrow \phi$ imposé : $\varphi = \operatorname{Arccos} y \rightarrow X$ ne peut prendre qu'une seule valeur $X = x = \sqrt{1-y^2} \rightarrow$

Estimation – Loi de Pareto

1/ Pour que $f_X(x)$ soit une ddp, il faut :

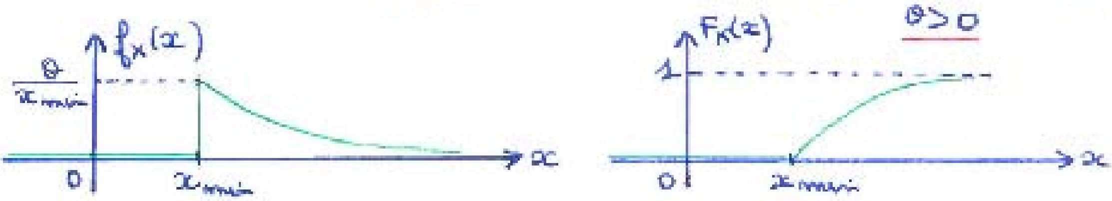
$$\begin{cases} - f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ - \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \end{cases}$$

• Or, par définition, $f_X(x) \geq 0$ ($x_{min} > 0$ et $\theta > 0$).

• $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = x_{min}^{\theta} \int_{x_{min}}^{+\infty} \frac{\theta}{x^{\theta+1}}\,dx = x_{min}^{\theta} \left.\frac{1}{x^{\theta}}\right|_{+\infty}^{x_{min}} \underset{\theta>0}{=} 1$

→ $f_X(x)$ est bien une ddp

2/



3/ $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\,d\alpha = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq x_{min} \\ x_{min}^{\theta} \left.\frac{1}{x^{\theta}}\right|_{x}^{x_{min}} = 1 - \frac{x_{min}^{\theta}}{x^{\theta}} \text{ sinon} \end{cases}$

4/ $m_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{x_{min}}^{+\infty} \theta \frac{x_{min}^{\theta}}{x^{\theta}}\,d\theta = x_{min} \frac{\theta}{\theta-1} \int_{x_{min}}^{+\infty} \underbrace{(\theta-1)\frac{x_{min}^{\theta-1}}{x^{\theta}}}_{\text{loi de Pareto de paramètre } \theta-1>0} dx$

→ $m_X = \frac{\theta}{\theta-1} x_{min}$ si $\theta > 1$.

5/ • $X \longrightarrow Y = g(X)$ $\quad f_Y(y) = f_X(x)\frac{1}{\left|\frac{dy}{dx}\right|}\Big|_{x \mid g(x)=y} = \sum_i f_X(x_i)\frac{1}{\left|\frac{dy}{dx}\right|}\Big|_{x=x_i / g(x_i)=y}$

• $f_Y(y) \underset{y = x/x_{min}}{=} f_X(x_{min}\,y)\,x_{min} = \begin{cases} \theta / y^{\theta+1} \text{ si } y \geq 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

6/ $f_{X_1 \dots X_N}(x_1, \dots, x_N) \underset{\text{VA indépendantes}}{=} \prod_{n=1}^{N} f_{X_n}(x_n) = \begin{cases} \theta^N / \left(\prod_{n=1}^{N} x_n\right)^{\theta+1} \text{ si } x_n \geq 1, \; n = 1 \dots N \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

7/ $= f_X(x) \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$

8/ • $L(\theta, X) = +N \ln\theta - (\theta+1)\sum_{n=1}^{N} \ln X_n$

• CN maximum : $\frac{\partial L(\theta,X)}{\partial\theta} = 0 = \frac{N}{\theta} - \sum_{n=1}^{N} \ln X_n \rightarrow \theta = \frac{N}{\sum_{n=1}^{N} \ln X_n}$

• $\frac{\partial^2 L(\theta,X)}{\partial\theta^2} = -\frac{N}{\theta^2} < 0$ → l'extremum est un maximum →

• $\hat{\theta}_{MV} = \frac{N}{\sum_{n=1}^{N} \ln X_n}$

9/ cf cours - cf courbe à la fin.

10/. Soit Z VA $\in \mathbb{C}^n$, de ddp $f_Z(z)$. $\varphi_Z(u) = E[e^{ju^t z}]$

11/ $E[e^{juZ}] = E[e^{juZ_1}\, e^{juZ_2}] \underset{\uparrow}{=} E[e^{juZ_1}]\, E[e^{juZ_2}] = \varphi_{Z_1}(u)\, \varphi_{Z_2}(u)$

Z_1 et Z_2 VA indépendantes

$= \dfrac{1}{\left(1 - j\frac{u}{a}\right)^{k_1+k_2}}$ = fonction caractéristique d'une VA de loi $\Gamma(a, k_1+k_2)$

$\rightarrow Z : \Gamma(a, k_1+k_2)$

12/ $f_{Z_n}(z_n) = \begin{cases} \left. f_{X_n}(x_n) \dfrac{1}{\left|\frac{dz_n}{dx_n}\right|} \right|_{x_n = e^{z_n}} & \text{si } z_n \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$= \begin{cases} \theta\, e^{-\theta z_n} & \text{si } z_n \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \rightarrow \Gamma(\theta, 1)$

13/ $U = \underbrace{\underset{\downarrow}{Z_1}_{\Gamma(\theta,1)} + Z_2}_{\Gamma(\theta,2) \text{ d'après } 11/} + \dots + Z_i + Z_{i+1} + \dots + Z_N$

hypothèse: $\sum_{m=1}^{i} Z_m : \Gamma(\theta, i)$, vérifié pour $i = 1$ et 2

$\rightarrow \sum_{m=1}^{i+1} Z_m : \Gamma(\theta, i+1)$ d'après 11/

$\rightarrow Z_N : \Gamma(\theta, N)$

14/. $E[U] = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\theta^N}{(N-1)!} e^{-\theta u} u^{N-2}\, du = \frac{\theta}{(N-1)} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\theta^{N-1}}{(N-2)!} e^{-\theta u} u^{N-2}}_{\text{ddp } \Gamma(\theta, N-1)} du = \frac{\theta}{N-1}$

. $E[U^2] = \dfrac{\theta^2}{(N-1)(N-2)}$

. $\sigma_u^2 = V_u = E[U^2] - E[U]^2 = \dfrac{\theta^2}{(N-1)^2(N-2)}$

15/ . $\hat\theta_{MV} = N \dfrac{1}{U} \rightarrow E[\hat\theta_{MV}] = \dfrac{N\theta}{N-1}$ et . biais $= E[\hat\theta_{MV}] - \theta = \dfrac{\theta}{N-1}$

16/ . $\hat\theta_{NB} = \dfrac{N-1}{\sum_{m=1}^{N} \ln X_m}$. $\sigma_{NB}^2 = V_{NB} = E[\hat\theta_{NB}^2] - E[\hat\theta]^2$

$= \left(\dfrac{N-1}{N-2} - 1\right)\theta^2 = \dfrac{\theta^2}{N-2}$

. $\sigma_{NB}^2 \underset{N\to+\infty}{\rightarrow} 0 \Rightarrow \hat\theta_{NB} \xrightarrow[N\to+\infty]{MQ} \theta \Rightarrow \hat\theta_{NB}$ est un estimateur consistant ($\hat\theta_{MV}$ aussi).

17/ D'après 8/ $\dfrac{\partial^2 L(\theta, X)}{\partial\theta^2} = -\dfrac{N}{\theta^2} \rightarrow BCR(\theta) = \dfrac{\theta^2}{N} < V_{NB}$

$\rightarrow$ l'estimateur non biaisé n'est pas efficace, cependant il est asymptotiquement efficace quand $N \to +\infty$: $\sigma_{NB}^2 \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} BCR(\theta)$.

18/ $\underline{f_{\Theta/X=x}(\theta)} = \dfrac{f_{X/\Theta=\theta}(x)\, f_\Theta(\theta)}{f_X(x)} \underset{\text{VA } X_m \text{ iid}}{=} \dfrac{\prod_{m=1}^{N} f_{X_m/\Theta=\theta}(x_m)\, f_\Theta(\theta)}{f_X(x)}$

$$= \begin{cases} \theta^N \dfrac{1}{\left(\prod_{m=1}^{N} x_m\right)^{\theta+1}} \dfrac{\lambda e^{-\lambda\theta}}{f_X(x)} & \text{si } x_m \geq 1 \quad m=1,\dots,N \text{ et } \theta \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} c\, e^{-(\lambda + \sum_{m=1}^{N} \ln x_m)\theta}\, \theta^N & \text{si } x_m \geq 1 \quad m=1,\dots,N \text{ et } \theta \geq 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$= \Gamma\Big(\underline{\lambda + \sum_{m=1}^{N} \ln x_m}, N+1\Big)$$

> 0 par définition ddp.
$\ln x_m \geq 0$ car $x_m \geq 1$ $\Big\}$ $\underbrace{\lambda + \sum_{m=1}^{N} \ln x_m}_{=a} > 0$

19/. $\hat{\theta}_{MAP} = \arg\max_\theta f_{\Theta/X=x}(\theta) = \arg\max_\theta \ln f_{\Theta/X=x}(\theta)$

$$= \arg\max_\theta \Big(N \ln\theta - (\lambda + \sum_{m=1}^{N} \ln x_m)\theta\Big) = \arg\max_\theta J_{MAP}(\theta, x)$$

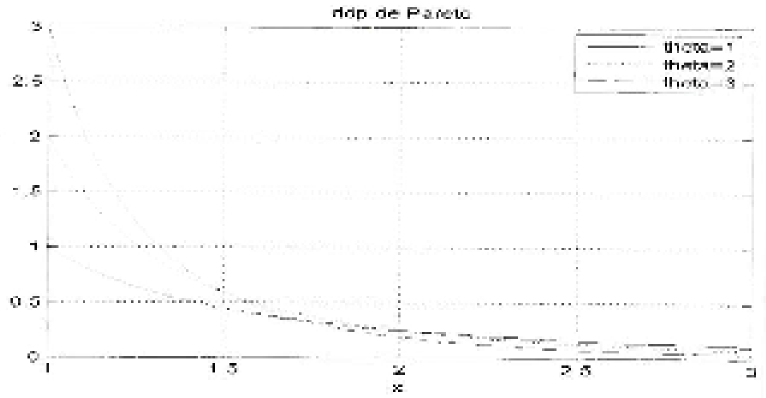
- CN maximum $\dfrac{\partial J_{MAP}(\theta,x)}{\partial\theta} = 0 \rightarrow \theta = \dfrac{N}{\lambda + \sum_{m=1}^{N} \ln X_m}$
- $\dfrac{\partial^2 J_{MAP}(\theta,x)}{\partial\theta^2} = -\dfrac{N}{\theta^2} < 0 \rightarrow$ CNS.
- $\underline{\hat{\theta}_{MAP} = \dfrac{N}{\lambda + \sum_{m=1}^{N} \ln X_m}}$ $\qquad$. $\underline{\hat{\theta}_{MAP} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \hat{\theta}_{MV}}$

20/. $\underline{E[\Theta/X=x]} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \theta f_{\Theta/X=x}(\theta)\, d\theta = \int \frac{a^{N+1}}{N!} e^{-a\theta}\, \theta^{N+1}\, d\theta$

$$= \frac{N+1}{a} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{a^{N+2}}{(N+1)!} e^{-a\theta}\, \theta^{N+1}\, d\theta}_{\Gamma(a,\, N+2)} = \underline{\frac{N+1}{\lambda + \sum_{m=1}^{N} \ln x_m}}$$

21/. $\underline{\hat{\theta}_{MQ}} = E[\Theta/X] = \underline{\dfrac{N+1}{\lambda + \sum_{m=1}^{N} \ln X_m}} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \hat{\theta}_{MAP} / \hat{\theta}_{MV}$

22/ cf cours.



Prédiction

1/. • SA stationnaire au sens strict : SA tel que toutes les propriétés statistiques sont indépendantes de l'origine des temps

• Soit $x[n] = A \sin(2\pi f_0 n)$ $\Rightarrow E[x[n]] = E[A] \sin(2\pi f_0 n)$

$= \frac{1}{2} \sin(2\pi f_0 n)$

VA uniformément répartie sur (0,1) — certain ($\neq 0$)

$\Rightarrow$ dépend de n $\rightarrow$ de l'origine des temps

$\Rightarrow$ SA non stationnaire (sens large ou strict)

2/. • SA ergodique au sens strict : SA tel que toutes ses moyennes temporelles sont indépendantes de la réalisation considérée

• Soit $x[n] = A \sin(2\pi f_0 n)$ idem 1/.

$P_x = \frac{A^2}{2}$ $\Rightarrow$ dépend de la réalisation considérée.

$\Rightarrow$ SA non ergodique (sens large ou strict)

3/ $\gamma_{xx}[k] = E[x[n]\, x[n-k]]$

$x[n]$ SA scalaire et réel

4/. • $\Gamma_{xx}(f) = TF[\gamma_{xx}[k]] = \sum_k \gamma_{xx}[k]\, e^{-j2\pi f k}$.

$$\begin{cases} \cdot\ \Gamma_{xx}(f) \in \mathbb{R} \\ \cdot\ \Gamma_{xx}(f) \geq 0 \\ \cdot\ \text{pour un SA réel } \Gamma_{xx}(-f) = \Gamma_{xx}(f) \end{cases}$$

5/ $e_1[n] \longrightarrow \boxed{H_1(f)} \longrightarrow s_1[n]$

$e_2[n] \longrightarrow \boxed{H_2(f)} \longrightarrow s_2[n]$

$$\Gamma_{s_1 s_2}(f) = H_1(f)\, H_2^*(f)\, \Gamma_{e_1 e_2}(f)$$

SA stationnaires dans leur ensemble

$H_1(f)\,/\,H_2(f)$ RF de 2 FL.

6/ $x[n] \longrightarrow \boxed{FL} \longrightarrow \hat{x}[n] = \sum_{k=1}^{K} h[k]\, x[n-k]$.

| $h[k]$ = RI du FL , RIF
| $h[k] = 0\ \forall k \leq 0$ et $\forall k > K$

7/ • $\tilde{x}[m] = \hat{x}[m] - x[m] = \sum_{k=1}^{K} h[k]\, x[m-k] - x[m]$

• $E[\tilde{x}[m]] = 0 \rightarrow$ estimateur non biaisé

$E[x[m]] = 0 \quad \forall m$ car SA centré

8/ ELMQ

9/ ELMQ $\rightarrow$ estimateur non biaisé + principe d'orthogonalité

$E[\tilde{x}[m]\; x[m-k]] = 0 \quad \forall k = 1, \dots, K \quad \rightarrow$

innovation observation

$E[(\hat{x}[m] - x[m])\, x[m-k]] = 0 \quad \forall k = 1, \dots, K$.

ou

• $P = E[\tilde{x}[m]^2]$ min $\rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial h[k]} = 2E\Big[\tilde{x}[m] \underbrace{\dfrac{\partial \tilde{x}[m]}{\partial h[k]}}_{= x[m-k]}\Big] = 0$

$k = 1, \dots, K$.

10/ $E\left[\left(\sum_{i=1}^{K} h[i]\, x[m-i] - x[m]\right) x[m-k]\right] = 0 \quad \forall k = 1, \dots, K \rightarrow$

$\sum_{i=1}^{K} h[i]\, \gamma_{xx}[k-i] = \gamma_{xx}[k] \quad \forall k = 1, \dots, K \rightarrow$

$T\, H = \Gamma$ avec $\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{xx}[1] \\ \vdots \\ \gamma_{xx}[K] \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} h[1] \\ \vdots \\ h[K] \end{pmatrix}$

$T = \begin{pmatrix} \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[1] & \cdots & \gamma_{xx}[K-1] \\ \gamma_{xx}[1] & \gamma_{xx}[0] & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \gamma_{xx}[1] \\ \gamma_{xx}[K-1] & \cdots & \gamma_{xx}[1] & \gamma_{xx}[0] \end{pmatrix}$ matrice de Toeplitz symétrique.

$\gamma_{xx}[-k] = \gamma_{xx}[k]$.

11/ $P_{min} = E[\tilde{x}[m]^2] = E\left[\tilde{x}[m] \left(\sum_{k=1}^{K} h[k]\, x[m-k] - x[m]\right)\right]$

$= -E[\tilde{x}[m]\, x[m]] = E\left[\left(x[m] - \sum_{k=1}^{K} h[k]\, x[m-k]\right) x[m]\right]$

principe d'orthogonalité

$= \gamma_{xx}[0] - \sum_{k=1}^{K} h[k]\, \gamma_{xx}[k] = P_{min}$

12/ • estimateur non biaisé $\hat{\gamma}_{xx}[k] = \dfrac{1}{N-k} \sum_{m=k+1}^{N} x[m]\, x[m-k]$

échantillons $x[1] \dots x[N]$ $\qquad k = 0, \dots, N-1$

• estimateur biaisé $\gamma_{xx}[k] = \dfrac{1}{N} \sum_{m=k+1}^{N} x[m]\, x[m-k]$.

13/ Signal de sortie = bruit blanc de dsp = 1

FILTRAGE 2D

I/ FILTRE 2D

On considère un filtre bidimensionnel de réponse impulsionnelle (RI) $h[m,n]$. On note $e[m,n]$ l'image en entrée du filtre et $s[m,n]$ l'image en sortie du filtre.

1/ Expliciter $s[m,n]$ en fonction de la RI du filtre.

On considère l'image suivante

$$\begin{cases} e[0,0] = e[0,1] = e[1,0] = e[1,-1] = 1, \\ e[m,n] = 0 \text{ ailleurs,} \end{cases}$$

et le filtre défini par

$$\begin{cases} h[0,0] = h[0,1] = h[1,0] = h[1,1] = 1, \\ h[m,n] = 0 \text{ ailleurs.} \end{cases}$$

2/ Représenter l'image en entrée du filtre et la RI du filtre.
3/ Expliciter la réponse en fréquence (RF) du filtre.
4/ Donner l'amplitude de chaque pixel de l'image en sortie du filtre.

II/ TRANSFORMÉE DE FOURIER 2D

On considère deux images et le module de leur transformée de Fourier (TF) (Figure 1). Après avoir justifié la démarche, associer la TF à chaque image.

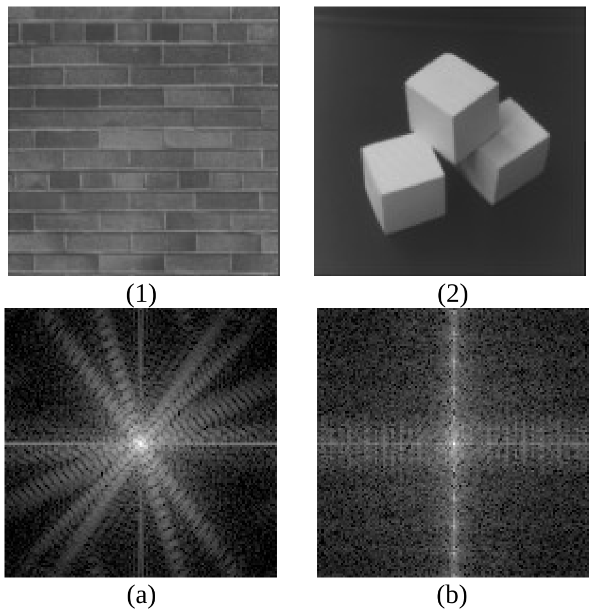


Figure 1 : Images (haut) et module de leur TF (bas)
source : John M. Brayer, Introduction to Fourier transforms for image processing

III/ FILTRE DU MÉDIAN

1/ Donner la définition du filtre du médian.
2/ Citer quelques propriétés du filtre du médian.
3/ Sont représentées ci-dessous trois images : image bruitée avec un bruit impulsionnel, image bruitée filtrée avec un filtre du médian appliqué avec une fenêtre 3x3 et image bruitée filtrée avec un filtre du médian appliqué avec une fenêtre 7x7. Préciser la légende de chaque image après avoir justifié le choix.

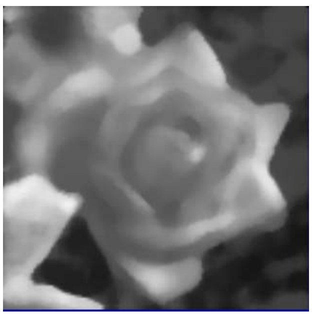


Figure 3

Figure 4

Figure 5

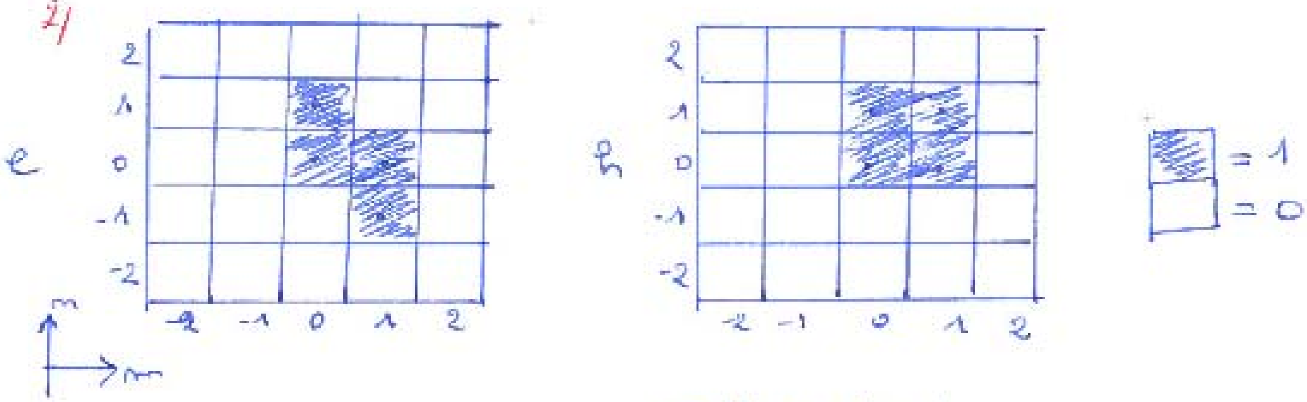
Source : Cours de Traitement d'images, Caroline Petitjean http://carolinepetitjean.free.fr/enseignements/ti/part3_TI_petitjean.pdf

IV/ ÉLÉMENTS DE CORRECTION DES EXERCICES

Filtrage 2D

1/ $s[m,n] = \sum_{k,l} h[k,l]\, e[m-k, n-l]$.

2/



3/ $G(f_m, f_n) = \sum_{m,n} h[m,n]\, e^{-j2\pi(f_m m + f_n n)}$

$$= \sum_m h[m]\, e^{-j2\pi f_m m} \sum_n h[n]\, e^{-j2\pi f_n n}$$

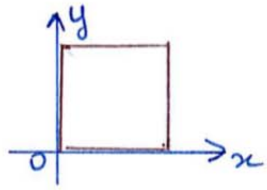
$$= (1 + e^{-j2\pi f_m})(1 + e^{-j2\pi f_n}).$$

4/ $s[m,n] = e[m,n] + e[m-1,n] + e[m,n-1] + e[m-1,n-1]$.

→ somme des 4 pixels

s (n \ m)	-2	-1	0	1	2	3
2	0	0	1	1	0	0
1	0	0	2	3	1	0
0	0	0	1	3	2	0
-1	0	0	0	1	1	0
-2	0	0	0	0	0	0

Transformée de Fourier 2D



L'image avec les briques est périodique selon Ox et Oy → 2 directions privilégiées que l'on retrouve au niveau spectral → TF selon f_x et f_y ⇒ (1) ⟷ (b)

L'image (2) ne contient pas de périodicité. Son spectre est donc plus riche ⇒ (2) ⟷ (a)

Filtre du médian

1/. On considère une fenêtre avec un nombre impair de pixels.
. On remplace le pixel central par la valeur médiane, soit encore la valeur telle qu'il y ait autant de valeurs plus grandes que plus petites.

2/ • Ce filtre permet de supprimer des bruits impulsionnels et de conserver la netteté des contours

3/ • fig. 4 : image bruitée avec bruit impulsionnel
• fig. 5 : sortie du filtre du médian avec fenêtre 3x3
• fig. 3 : " " " " " 7x7

le filtre du médian supprime les bruits ponctuels (de petite taille par rapport à la fenêtre) et donc les détails fins aussi
→ le filtre avec la fenêtre 7x7 élimine des détails de l'image.