

TD9 - Observateurs

Exercice 1 : Système hydraulique

On rappelle la loi de Bernoulli : $\rho \frac{V_1^2}{2} + \rho g z_1 + p_1 = \rho \frac{V_2^2}{2} + \rho g z_2 + p_2$ Ce qui donne $q_1 \approx kh_i$
 On a aussi la formule $k = \frac{S}{2} \sqrt{2gH_0}$

1. Cuve 1 :

On a la relation de débit $q_e - q_1 = \frac{dv_1}{dt}$, le volume $V_1 = V_1^0 + v_1$, sachant que $v_1 = h_1 * S$, d'où :
 $q_e - q_1 = S \frac{dh_1}{dt}$, et puisque $q_1 = kh_1$ on aboutit à :

$$q_e - kh_1 = S \frac{dh_1}{dt}$$

Cuve 2 :

On a ici, $q_1 - q_2 = \frac{dv_2}{dt} = S \frac{dh_2}{dt}$ donc :

$$kh_1 - kh_2 = S \frac{dh_2}{dt}$$

2. On a les relations :

$$\begin{aligned} \frac{dh_1}{dt} &= -\frac{k}{S}h_1 + \frac{1}{S}q_e \\ \frac{dh_2}{dt} &= \frac{k}{S}h_1 - \frac{k}{S}h_2 \end{aligned}$$

On pose $a = \frac{k}{S}$ et $b = \frac{1}{S}$, donc en posant $x = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$, on a :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} q_e$$

3.

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(p\mathbf{1} - A) \\ &= (\lambda + a)^2 \end{aligned}$$

On a donc une racine double négative, le système est donc globalement asymptotique stable.

4.

$$\begin{aligned} y &= h_1 \\ &= (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \\ &= Cx \end{aligned}$$

A-t-on observabilité du système ?

$$O(C, A) = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

Le système est non observable lorsque $y = h_1$.

$$\text{Si } y = h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} x$$

$$O(C, A) = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & -a \end{pmatrix}$$

Le système est observable lorsque $y = h_2$.

Rappel : Équation fondamentale de l'observateur asymptotique :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

Posons :

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= x - \hat{x} \\ \dot{\epsilon}_x &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ &= Ax + Bu - (A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y})) \\ &= A(x - \hat{x}) - L(Cx + C\hat{x}) \\ &= A\epsilon_x - LC\epsilon_x \end{aligned}$$

donc :

$$\dot{\epsilon}_x = (A - LC)\epsilon_x$$

avec $\epsilon_x(0) = x_0 - \hat{x}_0$

$$\epsilon_x(t) = e^{(A-LC)t} \epsilon_{x_0}$$

$$\hat{x} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x \Leftrightarrow \text{valeurs propres de } A-LC \text{ à } \operatorname{Re}(\cdot) < 0$$

On cherche $L \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ tel que $A - LC$ soit à valeurs propres à partie réelle négative.

Soit,

$$\begin{aligned} L &= \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \\ A - LC &= \begin{pmatrix} -a & -l_1 \\ a & -a - l_2 \end{pmatrix} \\ P_{A-LC}(p) &= p^2 + (2a + l_2)p + a^2 + a(l_1 + l_2) \\ \Pi_0(p) &= (p - \xi(-a))^2 \\ &= (p + \xi a)^2 \\ &= p^2 + 2\xi a p + \xi^2 a^2 \end{aligned}$$

d'où, par identification :

$$\begin{cases} 2a + l_2 = 2\xi a \\ a^2 + a(l_1 + l_2) = \xi^2 a^2 \end{cases}$$

donc, on obtient :

$$\begin{aligned} l_2 &= 2a(\xi - 1) \\ l_1 &= a(\xi - 1)^2 \end{aligned}$$

Exercice 2 : système hydraulique avec perturbation

1. On a :

$$\begin{aligned} q_e + q_p - q_1 &= S \frac{dh_1}{dt} \\ q_1 - q_2 &= S \frac{dh_2}{dt} \end{aligned}$$

d'où la représentation d'état :

$$\begin{pmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ a & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} q_e + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} q_p$$

2. On suppose que $q_p \approx cst$

Posons $x = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ q_p \end{pmatrix}$, on a alors :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{q}_p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -a & 0 & b \\ a & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ q_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} q_e \\ &= Ax + Bq_e \end{aligned}$$

3. Déterminons les valeurs propres :

$$\begin{aligned} \det(\lambda \mathbf{1} - A) &= \begin{vmatrix} \lambda + a & 0 & -b \\ -a & \lambda + a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda(\lambda + a)^2 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ y &= h_2 = (0 \ 1 \ 0)x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O(C, A) &= \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -a & 0 \\ -2a^2 & a^2 & ab \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\det(O(C, A)) = -a^2b$$

donc observable.