

## TD4 : Correcteur RST

### Exercice 1 : Asservissement par synthèse d'un correcteur RST

On considère la fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{1}{p(1 + \tau p)}$$

Rappel : (TD précédent)

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{B(z)}{A(z)} \\ &= \frac{b_1 z + b_0}{(z-1)(z-D)} \text{ avec } D = e^{-T_e/2} \\ &= \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0} \\ n &= \deg(A) = 2 \\ m &= \deg(B) = 1 \end{aligned}$$

1. Il y a plusieurs façon de représenter le correcteur RST :

$$\begin{aligned} \text{--- } \nu(z) &= -\frac{S(z)}{R(z)}Y(z) + \frac{T(z)}{R(z)}E(z) \\ \text{Les conditions de causalité sont alors : } &\tau \leq p \text{ et } \sigma \leq p. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{--- } \nu(z) &= \frac{S}{R}[-Y(z) + \frac{T}{S}E(z)] \\ \text{Causalité : } &\tau \leq p \text{ et } \sigma \leq p. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{--- } \nu(z) &= \frac{T}{R}[-\frac{S}{T}Y(z) + E(z)] \\ \text{Causalité : } &\tau \leq p \text{ et } \sigma \leq p. \end{aligned}$$

2. On a :  $Y(p) = G(p)[\nu(p) + P(p)]$ ,  $P(p) = \frac{P_0}{p}$  et  $\nu(p) = B_0(p)\nu^*(p)$

$$\begin{aligned} Y(p) &= G(p)[\nu(p) + P(p)] \\ &= G(p)[B_0(p)\nu^*(p) + \frac{P_0}{p}] \\ &= \frac{1 - e^{-T_e p}}{p} G(p)\nu^*(p) + G(p)\frac{P_0}{p} \end{aligned}$$

On pose  $A(p) = \frac{G(p)}{p}$ , et on a après transformée inverse de Laplace :

$$y(t) = (a * \nu^*)(t) - (a * \nu^*)(t - T_e) + a(t)P_0$$

après discrétisation on obtient :

$$y_k = a_k * \nu_k - a_{k-1} * \nu_{k-1} + a_k P_0$$

après transformée en  $z$  on a alors :

$$\begin{aligned} Y(z) &= A(z)\nu(z) - z^{-1}A(z)\nu(z) + A(z)P_0 \\ &= (1 - z^{-1})A(z)\nu(z) + A(z)P_0 \\ &= G(z)\nu(z) + (1 - z^{-1})A(z)(1 - z^{-1})^{-1}P_0 \\ &= G(z)\nu(z) + G(z)P_0 \frac{z}{z-1} \\ Y(z) &= G(z)(\nu(z) + p(z)) \end{aligned}$$

## 3. Calcul de R et S.

On considère l'exigence 1 du cahier des charges :

$$p_{1,2} = \omega_0(-\xi \pm j\sqrt{1-\xi^2}), \text{ avec } \omega_0 = 1.5 \text{ et } \xi = 0.7$$

$$p_3 = -3\omega_0\xi$$

Comme  $z_i = e^{T_e p_i}$ , avec  $\Omega = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ ,

$$z_1 = e^{-T_e\omega_0\xi}(\cos(\Omega T_e) + j\sin(\Omega T_e))$$

$$z_2 = \bar{z}_1$$

$$z_3 = e^{-3\omega_0\xi T_e}$$

En boucle fermée, l'asservissement considéré donne en posant  $G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ ,

$$Y(z) = \frac{BT}{AR+BS}E(z) + \frac{BR}{AR+BS}p(z)$$

On pose  $H_d(z) = \frac{B_d(z)}{\Pi_d(z)} = \frac{BT}{AR+BS}$ , avec  $\deg(\Pi_d) = q$  et  $\deg(B_d) = \mu$ . Les pôles (continus) imposés par le cahier des charges conduisent à la forme suivante pour le polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned}\Pi_d(z) &= (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \\ &= z^3 + C_2z^2 + C_1z + C_0\end{aligned}$$

avec

$$C_0 = z_1z_2z_3 = -e^{-5\omega_0\xi T_e}$$

$$C_1 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = (e^{-2\xi\omega_0 T_e} + 2e^{-4\xi\omega_0 T_e} \cos(\Omega T_e))$$

$$C_2 = -z_1 - z_2 - z_3 = -(e^{-3\xi\omega_0 T_e} + 2e^{-\xi\omega_0 T_e} \cos(\Omega T_e))$$

On s'intéresse à l'exigence 2 du cahier des charges : Pour  $E(z) = 0$  i.e  $e_k = 0$ , et  $P(z) = P_0 \frac{z}{z-1}$ ,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} y_k = 0$$

Ainsi, avec le théorème de la valeur finale on a :

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} Y(z) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{BR}{AR+BS} P_0 = 0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow 1} B(z)R(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow R(z) = (z-1)^l \tilde{R}(z) \text{ avec } l \geq 1\end{aligned}$$

Par simplicité, on prend donc  $l = 1$ .

$$\frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)} = \frac{B_d(z)}{\Pi_d(z)}$$

donc  $B(z)T(z) = B_d(z)$  et  $A(z)(z-1)\tilde{R}(z) + B(z)S(z) = \Pi_d(z)$

donc avec  $\tilde{A}(z) = (z-1)A(z)$ ,

$$\boxed{\tilde{A}(z)\tilde{R}(z) + B(z)S(z) = \Pi_d(z)}$$

Soit  $\tilde{n} = \deg(\tilde{A}) = n + 1$  et  $\tilde{\rho} = \deg(\tilde{R})$

1) Égalité des degrés :  $\deg(\tilde{A}\tilde{R}) = \deg(AR) < \deg(BS)$  par causalité, donc

$$\tilde{n} + \tilde{\rho} = q = 3$$

2) Nombre d'inconnues = nombre d'équations :

$\tilde{R}$  monique  $\rightarrow \tilde{\rho}$  inconnues

$S$  non monique  $\rightarrow \sigma + 1$  inconnues

$\Pi_d$  monique  $\rightarrow q$  inconnues

donc on a

$$\tilde{\rho} + \sigma + 1 = q$$

3) Causalité du correcteur  $\frac{S(z)}{R(z)}$ , donc on a nécessairement  $\sigma \leq \rho = \tilde{\rho} + 1$  d'où on a

$$\sigma = \tilde{n} - 1 \leq \tilde{\rho} + 1 = q - \tilde{n} + 1$$

donc

$$q \geq 2\tilde{n} - 2 = 4$$

Or, on avait déterminé  $q = 3$ , donc il faut donc introduire  $A_0(z)$  un polynôme auxiliaire/observable de degrés  $k$  qui doit être monique dans le numérateur et le dénominateur.

Les racines de  $A_0(z)$  sont choisies plus rapide que  $z_1, z_2$ , et  $z_3$  (d'au moins une décade).

On pose donc :  $\frac{BT}{AR+BS} = \frac{B_d A_0}{\Pi_d A_0}$  d'où :

$$AR + BS = \Pi_d A_0$$

$$\tilde{A}\tilde{R} + BS = \Pi_d A_0$$

1) Égalité des degrés

$$\tilde{n} + \tilde{\rho} = q + k \text{ avec, } q = 3 \text{ donné}$$

2) Nombre d'inconnues = nombre d'équations

$$\tilde{\rho} + \sigma + 1 = q + k$$

3) Causalité

$$\tilde{\rho} \geq \sigma - 1$$

Avec 1) et 2),

$$\sigma = \tilde{n} - 1 = 2$$

Avec 3) et 1)

$$-\tilde{n} + q + k \geq \tilde{n} - 2$$

$$k \geq 2\tilde{n} - 2 - q = k_{min} = 1$$

**Bilan :**

On a donc :

$$k \geq 1, \quad \sigma = 2, \quad \tilde{\rho} \geq 1$$

Idéalement, on prend  $k = 1$  et la racine de  $A_0$  doit être prise plus rapide (au moins une décade) que  $z_1, z_2$  et  $z_3$

$$A_0(z) = z - z_0 \text{ avec } z_0 = e^{-30\xi\omega_0 T_e}$$

On a alors :

$$\tilde{R}(z) = z + r_0$$

$$S(z) = s_2 z^2 + s_1 z + s_0$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_d(z) &= \Pi_d(z)A_0(z) \\ &= (z^3 + C_2 z^2 + C_3 z + C_0)(z - z_0) \\ &= z^4 + \tilde{C}_3 z^3 + \tilde{C}_2 z^2 + \tilde{C}_1 z + \tilde{C}_0 \end{aligned}$$

$$\text{avec } \tilde{C}_3 = C_2 - z_0$$

$$\tilde{C}_2 = C_1 - z_0 C_2$$

$$\tilde{C}_1 = C_0 - z_0 C_1$$

$$\tilde{C}_0 = -z_0 C_0$$

et

$$\begin{aligned}\tilde{A}(z) &= (z-1)A(z) = (z-1)(z^2 + a_1z + a_0) \\ &= z^3 + \tilde{a}_2z^2 + \tilde{a}_1z + \tilde{a}_0 \\ \text{avec } \tilde{a}_2 &= a_1 - 1 \\ \tilde{a}_1 &= a_0 - a_1 \\ \tilde{a}_0 &= -a_0\end{aligned}$$

L'équation  $\tilde{A}\tilde{R} + BS = \Pi_d A_0$  peut donc se réécrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ \tilde{a}_2 & b_0 & b_1 & 0 \\ \tilde{a}_1 & 0 & b_0 & b_1 \\ \tilde{a}_0 & 0 & 0 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ s_2 \\ s_1 \\ s_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_3 - \tilde{a}_2 \\ \tilde{C}_2 - \tilde{a}_1 \\ \tilde{C}_1 - \tilde{a}_0 \\ \tilde{C}_0 \end{bmatrix}$$

La résolution de cette équation donne les polynômes

$$\begin{aligned}R(z) &= (z-1)(z+r_0) \\ S(z) &= s_2 + z^2 + s_1z + s_0\end{aligned}$$

Il ne reste qu'à déterminer le polynôme  $T(z)$ .

$$\text{Rappel : } B(z)T(z) = B_d(z)A_0(z)$$

$$\frac{BT}{AR+BS} = \frac{B_d A_0}{\Pi_d A_0}$$

On note :  $\mu = \deg B_d$ , et on a  $k = \deg A_0$

Par causalité,

$$\begin{aligned}\deg(B_d A_0) &= \mu + k \leq \deg(\Pi_d A_0) = q + k \\ \mu &\leq k = 3\end{aligned}$$

En boucle ouverte : on a le retard  $n - m = 2 - 1 = 1$

$$q - \mu \geq 1 \longrightarrow \mu \leq q - 1 = 2$$

L'égalité des numérateurs donne alors  $m + \tau = \mu + k$  donc

$$\begin{aligned}\mu &= m + \tau - k = \tau \\ \tau &\leq 2\end{aligned}$$

Avec  $B_d(z) = B(z)\tilde{B}(z)$ ,

$$\begin{aligned}BT &= B_d A_0 \\ B(z)T(z) &= B(z)\tilde{B}(z)A_0(z) \\ T(z) &= \tilde{B}(z)(z - z_0)\end{aligned}$$

Solution la plus simple pour  $\tau \leq 2$  :  $\tilde{B}(z) = 1$  donc  $B_d(z) = B(z)$ , et

$$T(z) = A_0(z)$$

4.

$$Y(z) = \frac{B_d(z)}{\Pi_d(z)}E(z) + \frac{B_p(z)}{\Pi_d(z)}P(z)$$

En l'absence de perturbation, on veut que pour

$$E(z) = \frac{E_0 z}{z-1}$$

on ait :

$$Y(z) = \frac{E_0 z T_e}{(z-1)^2}$$

donc

$$\frac{B_d(z)}{\Pi_d(z)} = \frac{T_e}{z-1} \longrightarrow \Pi_d(z) = z-1$$

Compensation du zéro de B(z) avec  $B(z) = b_1 z + b_0 = b_1(z + \frac{b_0}{b_1})$  or,  $b_0 = 0.2(1-2D)$ , et  $b_1 = 0.2D$ , donc  $\frac{b_0}{b_1} = \frac{1-2D}{D}$  avec  $D = e-1$  donc  $\frac{b_0}{b_1} = \frac{0.052848}{0.073576} < 1$  donc le zéro est stable et on peut le compenser.

$H_d(z) = \frac{T_e}{z-1} \rightarrow$  retard =  $q - \mu = 1 \geq m - n$ . OK.

Modèle admissible :

$$\frac{BT}{AR + BS} = \frac{B_d A_0}{\Pi_d A_0}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 &\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{BR}{AR + BS} p(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{BR}{\Pi_d A_0} p(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{BR}{(z-1)A_0(z)} \frac{p_0 z}{z-1} = 0 \end{aligned}$$

Il faut,  $R(z) = (z-1)^l \tilde{R}(z)$  avec  $l \geq 2$ . On prend  $l = 2$ .

$$\begin{aligned} B(z) &= b_1(z + \frac{b_0}{b_1}) \\ &= B_s(z) B_{ns}(z) \\ \text{avec } B_s(z) &= (z + \frac{b_0}{b_1}) \\ \text{et } B_{ns}(z) &= b_1 \end{aligned}$$

on a donc :

$$\frac{B_s B_{ns} T}{AR + B_s B_{ns} S} = \frac{B_d A_0}{\Pi_d A_0}$$

Comme  $R = (z-1)^2 \tilde{R}(z)$ , en posant  $\tilde{R} = B_s \hat{R}$  ( $\hat{R}$  monique) et  $\tilde{A}(z) = (z-1)^2 A(z)$  on obtient

$$\frac{B_{ns} T}{\tilde{A} \hat{R} + B_{ns} S} = \frac{B_d A_0}{\Pi_d A_0}$$

D'où l'équation diophantine

$$\tilde{A} \hat{R} + B_{ns} S = \Pi_d A_0$$

On pose  $\hat{\rho} = \deg(\hat{R})$  et  $\tilde{n} = \deg(\tilde{A}) = n + l = 4$ .

1) Égalité des degrés :

$$\tilde{n} + \hat{\rho} = q + k$$

2) Nombre d'inconnues = nombre d'équations :

$$r\hat{h}_o + \sigma + 1 = q + k$$

3) Causalité :

$$\rho \geq \sigma$$

Avec 1) et 2),

$$\sigma = \tilde{n} - 1 = 3$$

Comme  $\rho = l + \hat{\rho} + m_S$ ,

$$\sigma = \tilde{n} - 1 \leq l + m_S + \hat{\rho} = l + m_S + q + k - \tilde{n}$$

$$\rightarrow k \geq k_{min} = 3$$

On choisit  $k = 3$ , et on a alors  $\hat{\rho} = 0$ .

Par conséquent, on a  $\hat{R}(z) = 1$  et on prend  $S(z) = s_3 z^3 + s_2 z^2 + s_1 z^1 + s_0$ .

L'équation se ramène donc à

$$\tilde{A} + B_n S = \Pi_d A_0$$

$$S = \frac{1}{b_1} (\Pi_d A_0 - \tilde{A})$$

Comme  $\Pi_d A_0 = (z - 1)A_0$  avec  $A_0 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = z^3 + C_2 z^2 + C_1 z + C_0$

$$\Pi_d A_0 = z^4 + \gamma_3 z^3 + \gamma_2 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_0$$

avec  $\gamma_3 = c_2 - 1, \gamma_2 = c_1 - c_2, \gamma_1 = c_0 - c_1, \gamma_0 = -c_0$ .

De plus,  $\tilde{A}(z) = (z - 1)^2 A(z) = z^4 + \tilde{a}_3 z^3 + \tilde{a}_2 z^2 + \tilde{a}_1 z^1 + \tilde{a}_0$

avec  $\tilde{a}_3 = a_1 - 2, \tilde{a}_2 = 1 - 2a_1 + a_0, \tilde{a}_1 = a_1 - 2a_0, \tilde{a}_0 = a_0$

On a donc,

$$\forall j = 0, \dots, 3, \quad s_j = \frac{\gamma_j - \tilde{a}_j}{b_1}$$

Il reste donc à déterminer le polynôme  $T(z)$ .