TD1 : Systèmes échantillonés

Exercice 1

— Montrer que $U(z) = \frac{z}{z-1}E(z)$, avec $u_k = \sum_{j=0}^{k} e_j$ et $Z(e_j) = E(z)$

$$u_{k-1} = \sum_{j=0}^{k-1} e_j \tag{1}$$
$$u_k = e_k + u_{k-1} \tag{2}$$

Donc en appliquant la transformée en z et en utilisant le théorème du retard,

$$U(z) = E(z) + z^{-1}U(z) \tag{3}$$
$$U(z) = \frac{z}{z-1}E(z) \tag{4}$$

— Montrer que $Z\{ke_k\} = -z\frac{d}{dz}(E(z))$

$$-z\frac{d}{dz}(E(z)) = -z\frac{d}{dz}(\sum_{k=0}^{+\infty} e_k z^{-k}) \tag{5}$$
$$= -z\sum_{k=0}^{+\infty} e_k(-k)z^{-k-1} \tag{6}$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} ke_k z^{-k} \tag{7}$$
$$= Z\{ke_k\} \tag{8}$$
$$\tag{9}$$

Exercice 2 :

Méthode : on effectue la transformée inverse pour obtenir le signal temporel. Puis on l'échantillonne avant de passer à sa transformée en Z, où l'on obtient une suite géométrique que l'on simplifie.

1.
$$Y(p) = L[y(t)] = \frac{1}{p(p+a)} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p+a}$$

On identifie
$$\alpha = \frac{1}{a} \text{ et } \beta = \frac{-1}{a}$$

donc par transformée inverse de Laplace,
$$y(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})\mathbf{1}(t)$$

Puis on échantillonne avec $t = k.t_e$ avec $k \in \mathbb{N}$, et on a $y_k = \frac{1}{a}(1 - e^{-a.k.T_e})$
On a donc :

$$Z\{y_k\} = Z\{\frac{1}{a}\} - Z\{\frac{1}{a}(e^{-aT_e})^k\}$$
$$= \frac{1}{a}(\frac{z}{z-1} - \frac{1}{1-e^{-aT_e}z^{-1}})$$
$$Y(z) = \frac{1}{a}(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT_e}})$$

2. On pose $Y(p) = \frac{a}{p^2+a^2} = L\{\sin(at)\}$:
   On a donc,
$$y_k = \sin(akT_e) = \frac{e^{jakT_e} - e^{-jakT_e}}{2j}$$
   Or ,
$$Z\{e^{jakT_e}\} = \frac{1}{1 - e^{jaT_e}z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{jaT_e}}$$
   et ,
$$Z\{e^{-jakT_e}\} = \frac{1}{1 - e^{-jaT_e}z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-jaT_e}}$$
   d'où :
$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{z}{2j}(\frac{1}{z - e^{jaT_e}} - \frac{1}{z - e^{-jaT_e}}) \\ &= \frac{z}{2j}(\frac{e^{jaT_e} - e^{-jaT_e}}{z^2 - z(2\cos(aT_e) + 1)}) \\ Y(z) &= \frac{z\sin(aT_e)}{z^2 - z(2\cos(aT_e) + 1)} \end{aligned}$$

3. On procède de même que ci-dessus avec $Y(p) = \frac{p}{p^2+a^2} = L\{\cos(at)\}$:
   On a donc,
$$y_k = \cos(akT_e) = \frac{e^{jakT_e} + e^{-jakT_e}}{2}$$
   D'où
$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{z}{2}(2z - \frac{e^{jaT_e} - e^{-jaT_e}}{z^2 - z(2\cos(aT_e) + 1)}) \\ Y(z) &= \frac{z(z - \cos(aT_e))}{z^2 - z(2\cos(aT_e) + 1)} \end{aligned}$$

4. Ici, les échantillons sont définis par :
$$y_0 = 0, y_1 = 1, y_2 = -1 \text{ et } \forall k > 2, y_k = 0$$
   On a alors :
$$\begin{aligned} Z\{y_k\} &= \sum_{k=0}^{+\infty} y_k.z^{-k} \\ Y(z) &= z^{-1} - z^{-2} \end{aligned}$$

5. $\forall k \in \mathbb{N}, y_{2k} = 0$ et $y_{2k+1} = 1$. Ainsi,
$$\begin{aligned} Z\{y_k\} &= \sum_{k=0}^{+\infty} 1.z^{-(2k+1)} \\ &= z^{-1}\sum_{k=0}^{+\infty} z^{-2k} \\ &= \frac{z}{z^2 - 1} \end{aligned}$$

6. $foralll \in \mathbb{N}, y_k = (-1)^{k+1}\mathbf{1}_k$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
Z\{y_k\} &= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{k+1}z^{-k} \\
&= -\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(z^{-1})^k \\
&= -\frac{1}{1+z^{-1}} \\
&= -\frac{z}{z+1}
\end{aligned}$$

Exercice 3 :

Méthode : dans le cas général, on réécrit $\frac{Y(z)}{z}$ en décomposant en éléments simples puis on repasse Y(z) sous forme de série pour effectuer la transformée en Z inverse. De plus, pour les fractions rationnelles dont le dénominateur est d'ordre deux ou plus, on utilise la propriété de multiplication par une variable d'évolution :

$$TZ: \quad k^n x[k] \to (-z\frac{d}{dz})^n X(z)$$

1. Pour $h > 0$ et $a \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \frac{z}{z-a^h} \\
&= \frac{1}{1-\frac{a^h}{z}} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}(a^h.z^{-1})^k \\
Y(z) &= Z\{(a^h)^k\}
\end{aligned}$$

2. $Y(z) = \frac{z+1}{(z-3)^2}$
   On pose

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z+1}{z(z-3)^2} = \frac{\alpha}{z} + \frac{\beta}{z-3} + \frac{\gamma}{(z-3)^2}$$

   On identifie ensuite $\alpha = \frac{1}{9}$, $\gamma = \frac{4}{3}$ et pour β on peut multiplier l'égalité par $(z-3)$ puis faire tendre z vers $+\infty$ pour obtenir que $0 = \alpha + \beta$. D'où $\beta = \frac{-1}{9}$, et ainsi :

$$Y(z) = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\frac{z}{z-3} + \frac{4}{3}\frac{z}{(z-3)^2}$$

   La transformée inverse donne alors en utilisant la propriété de multiplication :

$$y_k = \frac{1}{9}.\delta_k - \frac{1}{9}.3^k.\mathbf{1}_k + \frac{4}{3}.k.3^{k-1}.\mathbf{1}_k$$

3. $Y(z) = \frac{z+3}{z^2-3z+2} = \frac{z+3}{(z-1)(z-2)}$ On pose

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{\alpha}{z} + \frac{\beta}{z-1} + \frac{\gamma}{z-2}$$

   On identifie ensuite $\alpha = \frac{3}{2}$, $\gamma = 5$, $\beta = -4$, d'où :

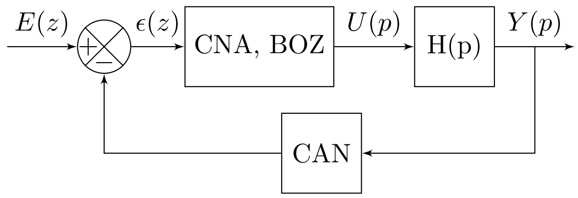
$$Y(z) = \frac{3}{2} - 4\frac{z}{z-1} + 5\frac{z}{z-2}$$

   La transformée inverse donne alors :

$$y_k = \frac{3}{2}.\delta_k - 4.\mathbf{1}_k + 5.2^k.\mathbf{1}_k$$

Exercice 5 :

L'asservissement analogique considéré est le suivant, où $H(p) = \frac{C}{p(1+0.2p)}$ et $B_0(p) = \frac{1-e^{-T_e p}}{2}$, avec $T_e = 0.2s$ et $C = 5rad.s^{-1}$.



1. Par propriété du cours, on a :

$$T(z) = (1 - z^{-1}).Z\{^*L^{-1}\{\frac{H(p)}{p}\}\}$$

On commence par poser $A(p) = \frac{H(p)}{p} = L\{a(t)\}$ et $a_n = a(n.T_e)$, donc

$$T(z) = (1 - z^{-1}).Z\{a_n\}$$

On a alors :

$$A(p) = \frac{C}{p^2(1 + 0.2p)} = C(\frac{\alpha}{p^2} + \frac{\beta}{p} + \frac{\gamma}{1 + 0.2p})$$

On trouve, $\gamma = 0.04$, $\alpha = 1$ et $\beta = -0.2$. Donc en repassant dans le domaine réel on a :

$$A(t) = C(t - 0.2 + 0.2e^{-5t})u(t)$$

Donc en échantillonnant avec $a_n = A(nT_e)$:

$$a_n = A(nT_e) = C(n.T_e - 0.2 + 0.2e^{-5nT_e})$$

Ainsi, avec la transformée en Z on a :

$$Z\{a_n\} = C(T_e\frac{z}{(z-1)^2} - 0.2\frac{z}{z-1} + 0.2\frac{z}{z-\chi}) \text{ avec } \chi = e^{-5T_e}$$

d'où avec la formule initiale, on obtient :

$$\begin{aligned}
T(z) &= \frac{z-1}{z}Z\{a_n\} \\
&= C\frac{z-1}{z}(\frac{T_e z}{(z-1)^2} - \frac{0.2z}{z-1} + \frac{0.2z}{z-\chi}) \\
&= C(\frac{T_e}{z-1} - 0.2 + 0.2\frac{z-1}{z-\chi}) \\
&= C.\frac{T_e(z-\chi) - 0.2(z^2 - (1+\chi)z + \chi) + 0.2(z^2 - 2z + 1)}{z^2 - (1+\chi)z + \chi} \\
T(z) &= C.\frac{(T_e + 0.2(1+\chi) - 0.4)z + (-\chi T_e - 0.2\chi + 0.2)}{z^2 - (1+\chi)z + \chi}
\end{aligned}$$

On pose :
- $b_1 = C(T_e + 0.2(1 + \chi) - 0.4)$
- $b_0 = C(0.2 - \chi T_e - 0.2\chi)$
- $a_1 = -(1 + \chi)$
- $a_0 = \chi$

Ainsi, on a :

$$T(z) = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Remarque :
Les pôles analogiques sont : $p_1 = 0$, $p_2 = -5$.
Les pôles discrétisés sont : $p_{z_1} = 1$ et $p_{z_2} = \chi$.
(On peut le vérifier avec la relation $p_{z_i} = e^{p_i T_e}$.)
Les zéros du temps discret dépendent de T_e.

2. On a donc en boucle fermée :

$$\begin{aligned} Y(z) = \frac{T(z)}{1+T(z)} E(z) &= \frac{B(z)}{A(z)+B(z)} E(z) \\ &= \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + (a_1 + b_1) z + a_0} = F(z)E(z) \end{aligned}$$

Les zéros de T(z) sont aussi les zéros de F(z).

D'autre part, on cherche $G(z) = \frac{\epsilon(z)}{E(z)}$. Or :

$$\begin{aligned} \epsilon(z) &= E(z) - Y(z) \\ &= (1 - F(z))E(Z) \\ &= \frac{1}{1+T(z)} E(z) \\ &= \frac{A(z)}{A(z)+B(z)} \\ &= G(z)E(z) \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$G(z) = \frac{z^2 + a_1 z + a_0}{z^2 + (a_1 + b_1) z + (a_0 + b_0)}$$

3. a – Déterminons la relation de récurrence entrée-sortie du système en boucle fermée. On a en factorisant par z^2 :

$$Y(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + (a_1 + b_1) z^{-1} + (a_0 + b_0) z^{-2}} E(z)$$

$$Y(z)(1 + (a_1 + b_1) z^{-1} + (a_0 + b_0) z^{-2}) = E(z)(b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2})$$

d'où, avec la transformée inverse, la relation de récurrence suivante :

$$y_k + (a_1 + b_1) y_{k-1} + (a_0 + b_0) y_{k-2} = b_1 e_{k-1} + b_0 e_{k-2}$$

b – Déterminons la réponse à un échelon $E(z) = \frac{z}{z-1}$:

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + (a_1 + b_1) z + (a_0 + b_0)} \frac{Y(z)}{z} = \frac{\alpha}{z-1} + \frac{\beta}{z-p_1} + \frac{\alpha}{z-p_2}$$

d'où :

$$y_k = (\alpha + \beta p_1^k + \gamma p_2^k).\mathbf{1}_k$$