

# 1 Formule des moments et des interférences

On considère les filtres :



On s'intéresse aux filtres linéaires :

## Définition

- Un filtre linéaire conserve la linéarité des systèmes auxquels il est appliqué.
- Il est temps-invariant.
- et stationnaire.

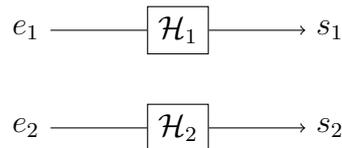
On peut caractériser un filtre linéaire par :

- sa réponse impulsionnelle  $h$
- sa réponse fréquentielle  $H = TF[h]$
- sa fonction de transfert  $H_{II}$ .

## Proposition (*Moyenne*)

$$m_s = H(0)m_e$$

Pour deux filtres on a :



## Proposition (*Formule des interférences*)

$$\Gamma_{s_1, s_2}(f) = H_1(f) \cdot H_2(f)^* \cdot \Gamma_{e_1, e_2}(f)$$

## 2 Application

### 2.1 Blanchiment d'un signal

Pour générer un bruit blanc  $s(t)$  on veut :

$$\Gamma_0 = |H(f)|^2 \Gamma_{ee}(f) \implies |H(f)|^2 = \frac{\Gamma_0}{\Gamma_{ee}(f)}$$

## 2.2 Identification d'un filtre linéaire

On applique en entrée un bruit blanc tel que  $\Gamma_{ee}(f) = \Gamma_0$ . Alors :

$$\Gamma_{se} = H(f)\Gamma_e(f) \implies H(f) = \frac{\Gamma_{se}(f)}{\Gamma_0} \propto \text{intercorrélacion entrée sortie}$$

## 2.3 Signaux ARMA

On peut utiliser un Filtre Linéaire (FL) pour définir un Signal Aléatoire. (SA). Le SA sera la sortie d'un filtre dynamique (Fonction de transfert rationnel ,stable ,causal) excité par un bruit blanc.

### 2.3.1 AR : autoregressif

$$H_{II}(z) = \frac{1}{D(z)} = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^q a_i z^{-i}}$$

Alors on aura en sortie du filtre :

$$s_k = e_k + \sum_{i=1}^q a_i s_{k-i}$$

on parle aussi de filtre « tout pôle »

### 2.3.2 MA : Moyenne ajustée

$$H_{II}(z) = N(z) = 1 + \sum_{i=1}^q b_i z^{-i}$$

Alors on aura en sortie du filtre :

$$s_k = e_k + \sum_{i=1}^q b_i e_{k-i}$$

### 2.3.3 ARMA

$$H_{II}(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

On connaît alors  $\Gamma_{ss}$  et le modèle AR. (Équation de Yule Walker, cf TP2)

## 2.4 Signaux AR : illustration

pour une entrée en bruit blanc , les poles proches du cercle unités sont dominant (approche géométrique , joli dessin)

## 2.5 Filtre Adapté (FA)

**Contexte** Problème de transmission numérique (tout ou rien) d'un signal déterministe, connu avec bruit additif.

**Objectif** déterminer le meilleur traitement linéaire pour décider de la présence ou non d'un signal.

Exemple en TD

**Méthode** : Maximiser le RSB à l'instant de décision : avec  $|s_{n_0}^f|^2$  puissance instantanée à l'instant de décision.

$$\boxed{\frac{|s_{n_0}^f|^2}{E[|b_n^f|^2]}}$$

### Proposition (*Application au bruit blanc*)

$$E[|b_n^f|^2] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |H(f)|^2 \Gamma_{bb}(f) df = \Gamma_0 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |H(f)|^2 df$$

$$|S_{n_0}^f|^2 = \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |H(f)|^2 S(f) e^{j2\pi n_0 f} df \right|^2 \leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |H(f)|^2 df \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |S(f)|^2 df$$

On a égalité si  $H(f) \propto S^*(f) e^{-j2\pi n_0 f} \iff h_n \propto s_{n_0-n}^f$

LA RI du filtre est donc

- un retour temporel
- translaté autour de l'instant de décision (attention a la causalité)
- conjugué.

### Remarque

- Le FA peut être non causal, la RI est alors tronqué et le filtre sous-optimal.
- Le FA est un corrélateur (d'énergie), l'objectif n'est pas de restituer le signal utile mais d'avoir le meilleur RSB à l'instant de décision.