1 Formule des moments et des interférences

On considère les filtres :

$$e \longrightarrow \boxed{\mathcal{FL}} \longrightarrow s$$

On s'interesse aux filtre linéaires :

Définition

- Un fltre linéaire conservent la linéarité des systèmes auxquels il est appliqué.
- Il est temps-invariant.
- et stationnaire.

On peux caractériser un filtre linéaire par:

- sa réponse impulsionnelle h
- sa réponse fréquentielle $H = TF[h]$
- sa fonction de transfert H_{II}.

Proposition ***(Moyenne)***

$$m_s = H(0)m_e$$

Pour deux filtres on a :

$$e_1 \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}_1} \longrightarrow s_1$$

$$e_2 \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}_2} \longrightarrow s_2$$

Proposition ***(Formule des interférences)***

$$\Gamma_{s_1,s_2}(f) = H_1(f) \cdot H_2(f)^* \cdot \Gamma_{e_1,e_2}(f)$$

2 Application

2.1 Blanchiement d'un signal

Pour générer un bruit blanc $s(t)$ on veux :

$$\Gamma_0 = |H(f)|^2 \Gamma_{ee}(f) \implies |H(f)|^2 = \frac{\Gamma_0}{\Gamma_{ee}(f)}$$

2.2 Identification d'un filtre linéaire

On applique en entrée un bruit blanc tel que $\Gamma_{ee}(f) = \Gamma_0$. Alors :

$$\Gamma_{se} = H(f)\Gamma_e(f) \implies H(f) = \frac{\Gamma_{se}(f)}{\Gamma_0} \propto \text{intercorrélation entrée sortie}$$

2.3 Signaux ARMA

On peux utilise un Filtre Linéaire (FL) pour définir un Signal Aléatoire. (SA). Le SA sera la sortie d'un filtre dynamique (Fonction de transfert rationnel ,stable ,causal) excité par un bruit blanc.

2.3.1 AR : autoregressif

$$\boxed{H_{II}(z) = \frac{1}{D(z)} = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{q} a_i z^{-i}}}$$

Alors on aura en sortie du filtre :

$$s_k = e_k + \sum_{i=1}^{q} a_i s_{k-i}$$

on parle aussi de filtre « tout pôle »

2.3.2 MA : Moyenne ajustée

$$\boxed{H_{II}(z) = N(z) = 1 + \sum_{i=1}^{q} b_i z^{-i}}$$

Alors on aura en sortie du filtre :

$$s_k = e_k + \sum_{i=1}^{q} b_i e_{k-i}$$

2.3.3 ARMA

$$H_{II}(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

On connait alors Γ_{ss} et le modèle AR. (Équation de Yule WAlker, cf TP2)

2.4 Signaux AR : illustration

pour une entrée en bruit blanc , les poles proches du cercle unités sont dominant (approche géométrique , joli dessin)

2.5 Filtre Adapté (FA)

Contexte Problème de transmission numérique (tout ou rien) d'un signal déterministe, connu avec bruit additif.

Objectif déterminer le meilleur traitement linéaire pour décider de la présence ou non d'un signal.

Exemple en TD

Méthode :Maximiser le RSB à l'instant de décision : avec $|s^f_{n_0}|^2$ puissance instantanée à l'instant de décision.

$$\boxed{\frac{|s^f_{n_0}|^2}{E[|b^f_n|^2]}}$$

Proposition ***(Application au bruit blanc)***

$$E[|b^f_n|^2] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |H(f)|^2 \Gamma_{bb}(f) df = \Gamma_0 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |H(f)|^2 df$$

$$|S^f_{n_0}|^2 = \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |H(f)|^2 S(f) e^{j2\pi n_0 f} df \right| \leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |H(f)|^2 df \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |S(f)|^2 df$$

On a égalité si $H(f) \propto S^*(f) e^{-j2\pi n_0 f} \iff h_n \propto s^f_{n_0 - n}$
LA RI du filtre est donc

- un retour temporel
- translaté autour de l'instant de décision (attention a la causalité)
- conjugué.

Remarque

- Le FA peut être non causal, la RI est alors tronqué et le filtre sous-optimal.
- Le FA est un corrélateur (d'énergie), l'objectif n'est pas de restituer le signal utile mais d'avoir le meilleur RSB à l'instant de décision.