

TD3 : Correcteur des asservissements numériques

Exercice 1 : Analyse et synthèse par une approche (pseudo-)continue

On considère la fonction de transfert

$$H(p) = \frac{1}{p(1 + \tau p)} \text{ avec } \tau = 0,2$$

La période d'échantillonnage est $T_e = 0,2s$ et l'on souhaite régler le correcteur PI pour satisfaire le cahier des charges suivants en boucle fermée :

- marge de phase de 45 degrés
- erreur en vitesse ϵ_v nulle

1. Synthèse d'un correcteur à temps continu

- (a) On considère le BOZ $B_0(p) = \frac{1 - e^{-T_e p}}{p}$ que l'on cherche à approcher par un retard pur équivalent :

$$\begin{aligned} B_0(p) &= \frac{1 - e^{-T_e p}}{p} \\ &= e^{-\frac{T_e p}{2}} \frac{e^{\frac{T_e p}{2}} - e^{-\frac{T_e p}{2}}}{p} \end{aligned}$$

Or, le développement limité à l'ordre 1 $e^{-T_e p} = 1 - T_e p$ donne :

$$\tilde{B}_0(p) = e^{-\frac{T_e p}{2}} \frac{1 + \frac{T_e p}{2} - (1 - \frac{T_e p}{2})}{p}$$

$$\tilde{B}_0(p) = T_e e^{-\frac{T_e p}{2}}$$

- (b) On se propose de régler le correcteur PI en utilisant le tracé de la fonction de transfert en boucle ouverte du système.

Le correcteur a donc la forme :

$$C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$$

et on pose

$$L(p) = \tilde{B}_0(p)H(p) = \frac{T_e e^{-\frac{T_e p}{2}}}{p(1 + \tau p)}$$

On s'intéresse dans un premier temps à l'erreur en vitesse. On prend donc pour entrée $e(t) = t$ d'où $E(p) = \frac{1}{p^2}$

On a donc comme écart $\epsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + L(p)C(p)}$, et on va appliquer le théorème de la valeur finale :

$$\begin{aligned} \epsilon_v &= \lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} p \epsilon(p) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p^2} \frac{1}{1 + L(p)C(p)} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{T_i p (1 + \tau p)}{T_i p^2 (1 + \tau p) + T_e e^{-\frac{T_e p}{2}} K_p (1 + T_i p)} = 0 \end{aligned}$$

L'erreur statique de vitesse est bien nulle avec ce modèle du retard pur pour le BOZ.

Intéressons-nous maintenant au réglage du correcteur, on relève le gain lorsque la phase est de -135 degrés et on cherche à annuler ce gain pour imposer le marge de phase à 45 degrés. On relève un gain de -35dB, il faut donc relever le gain de 35dB :

$$20\log(K_p) = 25 \Rightarrow K_p = 10^{\frac{25}{20}} = 18$$

De plus, pour régler T_i , on fait en sorte que la phase du correcteur n'influence pas trop celle du système dans la bande passante, donc que la phase du correcteur seul soit à zéro quand celle du système est proche du point critique -1. Il est une bonne approximation de prendre T_i de sorte que $\frac{1}{T_i}$ soit une décade plus tôt que la pulsation de coupure du système ou d'annulation du gain (choix effectué ici). Donc :

$$\frac{1}{T_i} = \frac{\omega_{0dB}}{10} \Rightarrow T_i = \frac{10}{3} = 3.3s$$

- (c) On utilise l'approximation $z = e^{pT_e} \approx 1 + pT_e$ pour écrire la fonction de transfert en z du correcteur échantillonné, on a donc $p = \frac{z-1}{T_e}$, d'où :

$$\begin{aligned} C(p)|_{p=\frac{z-1}{T_e}} &= C(z) \\ &= K_p \left(1 + \frac{1}{\frac{T_i}{T_e}(z-1)}\right) \\ &= K_p \frac{z + \frac{T_e}{T_i} - 1}{z - 1} \end{aligned}$$

La fonction de transfert en z du système + BOZ est :

$$\begin{aligned} T(z) &= (1 - z^{-1})Z\{L^{-1}\{\frac{H(p)}{p}\}\} \\ &= \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0} \\ \text{avec } b_0 &= (1 - D)\tau - T_e D \\ b_1 &= T_e + (D - 1)\tau \\ a_0 &= D \\ a_1 &= -D - 1 \\ D &= e^{-T_e/\tau} \end{aligned}$$

- (d) Déterminons si le système échantillonné est stable si asservi de la sorte (correcteur numérique) :

On peut appliquer le critère de Routh à $1 + C(z)T(z)$, avec $T(z)$ la fonction de transfert de l'asservissement échantillonné, CF TD précédent.

2. Synthèse "pseudo-continue"

- (a) Déterminons la fonction de transfert en w du système échantillonné :

$$\begin{aligned} T(z)|_{z=\frac{1+w}{1-w}} = \tilde{T}(w) &= \frac{b_1 \frac{1+w}{1-w} + b_0}{(\frac{1+w}{1-w})^2 + a_1 \frac{1+w}{1-w} + a_0} \\ &= \frac{b_1(1-w^2) + b_0(1-2w+w^2)}{(w^2 + w + 1) + a_1(1-w^2) + a_0(1-2w+w^2)} \end{aligned}$$

$$\tilde{T}(w) = \frac{(b_0 - b_1)w^2 - 2b_0w + b_0 + b_1}{(1 - a_1 + a_0)w^2 + 2(1 - a_0)w + 1 + a_1 + a_0}$$

Comment se traduit le cahier des charges pour le système transformé ?

$$z = \frac{1+w}{1-w} \Leftrightarrow w = \frac{z-1}{z+1} \text{ avec } z = e^{T_e p}$$

La réponse fréquentielle est valable pour $p = j\omega$ avec $\omega \in [0, \frac{\pi}{T_e}]$, donc pour :

$$w = \frac{e^{j\omega T_e} - 1}{e^{j\omega T_e} + 1} = \frac{2j \sin(\frac{\omega T_e}{2})}{2 \cos(\frac{\omega T_e}{2})} = j \tan(\frac{\omega T_e}{2})$$

Ainsi, quand ω varie de 0 à $\frac{\pi}{T_e}$ alors w varie de 0 à l'infini sur l'axe des imaginaires. On pose donc $w = j\tilde{\omega}$ et $\tilde{\omega} \in [0; +\infty[$

En quoi on répond à la question ???

(b) On va régler ici le correcteur PI en la variable w : On a $C(w) = K_p(1 + \frac{1}{T_i w})$ et $\epsilon(w) = \frac{1}{1+C(w)T(w)} E(w)$

On applique une entrée en rampe $t \rightarrow nT_e \rightarrow \frac{T_e z}{(z-1)^2}$, on a donc :

$$\begin{aligned} E(w) = E(z)|_{z=\frac{1+w}{1-w}} &= \frac{T_e(1+w)}{(1-w)(\frac{1+w-1+w}{1-w})^2} \\ &= \frac{T_e(1-w^2)}{4w^2} \end{aligned}$$

Intéressons nous maintenant à l'écart statique en vitesse avec el théorème de la valeur finale :

$$\begin{aligned} \epsilon_v &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) \\ z \rightarrow 1 &\Leftrightarrow w \rightarrow 0 \text{ car, } z-1 = \frac{2w}{1-w} \\ \epsilon_v &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{2w}{1-w} \epsilon(w) \\ &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{2w}{1-w} \frac{1}{1 + K_p(1 + \frac{1}{T_i w} \frac{\beta_2 w^2 + \beta_1 w + \beta_0}{\alpha_2 w^2 + \alpha_1 w + \alpha_0} \frac{T_e(1-w^2)}{4w^2})} \\ &= \dots \\ &= 0 \end{aligned}$$

Caractérisons maintenant le correcteur en fonction du cahier des charges. Comme précédemment on relève le gain lorsque la phase est à -135 degrés et on a : $K_p = 10^{\frac{10}{20}} = 3.3$ et le choix de T_i est le même fait comme précédemment donc : $T_i = \frac{10}{\tilde{\omega}_{0dB}} = 33.3s$

(c) La transformée en z ainsi, obtenue est :

$$\begin{aligned} C(z) &= C(w)|_{w=\frac{z-1}{z+1}} \\ &= K_p(1 + \frac{z+1}{T_i(z-1)}) \\ &= \frac{C_p T_i z + 1 - T_i}{T_i z - 1} \end{aligned}$$