

421 - Controle de processus

24 décembre 2018

Table des matières

1	Echantillonnage des signaux et transformée en z	5
1	Introduction : positionnement du problème	5
2	Modélisation des signaux échantillonnés	7
3	Transformée en z et lien avec Fourier / Laplace	8
4	Transformée en z inverse	11
4.1	Méthode par décomposition en éléments simples	12
4.2	Méthode des résidus	13
5	Modélisation des CAN et CNA	13
5.1	Convertisseur analogique numérique	13
2	Fonctions de transfert en z	15
1	Premières propriétés	15
2	Obtention d'une fonction de transfert en z à partir d'une équation récurrente . .	17
3	Réponse temporelle de système à temps discret	19
3.1	Calcul à partir de la relation de récurrence	19
3.2	Calcul à partir de la fonction de transfert	19
3.3	Par décomposition modale	20
4	Stabilité	21
5	Transposition des méthodes analogiques	23
5.1	Approximation du BOZ par un retard équivalent	23
5.2	Approximation de Padé pour les retards	23
5.3	Correction numérique obtenue par discrétisation approchée d'un correc- teur continu	24
3	Commande dans l'espace d'état	29
1	Concept du modèle d'état	29
1.1	Définitions	29
1.2	Quelques exemples	31
2	Quelques propriétés de base, valables à temps continu ou discret	32
2.1	Non-unicité d'un modèle d'état	32
2.2	Solution de l'équation d'état	33
2.3	Modèle d'état pour quelques associations de systèmes (TD1)	37
3	Commandabilité et observabilité	37
3.1	Commandabilité	37
3.2	Observabilité	40
4	Relation modèle d'état / fonction de transfert	42

4.1	Modèle d'état vers fonction de transfert	42
4.2	Fonction de transfert / équation différentielle vers modèle d'état	43
4.3	Changement de base vers une forme canonique	44
4.4	Dualité observation-commande	44
4.5	Commandabilité et observabilité pour les formes canoniques	44
5	Commande par retour d'état	45
5.1	Mise en équation (cas continu) :	46
5.2	Calcul du gain K du retour d'état	47
5.3	Calcul du terme de précommande η	49
5.4	Poursuite de trajectoire	49
6	Observateur	51
6.1	Concept	51
6.2	Observateur asymptotique (extension de l'observateur de Luenberger) . .	51
6.3	Correcteur par retour de sortie - Correcteur par retour d'état sur l'état reconstruit	53
7	Modèle d'état d'un système analogique discrétisé par un CNA-BOZ	53

Chapitre 1

Echantillonnage des signaux et transformée en z

1 Introduction : positionnement du problème

On va s'intéresser aux signaux analogiques vus comme des fonctions réelles

$$x : t \in \mathbb{R} \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}$$

Les processus évoluent continûment dans le temps.

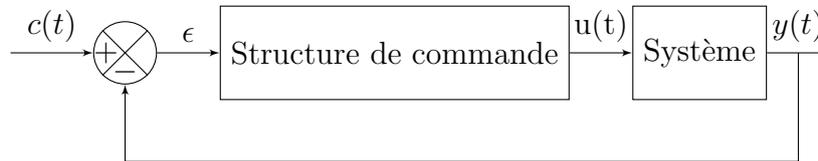


FIGURE 1.1 – Asservissement analogique

La loi de commande est alors :

$$U(p) = C(p) \cdot [R(p) - Y(p)], \text{ transformée de Laplace de}$$
$$u(t) = c(t) * [r(t) - y(t)]$$

Problématique Il faut alors évaluer $u(t)$ et le mettre en œuvre de manière analogique et/ou bon moment. Pour cela, il est nécessaire de calculer en temps réels et d'adapter $u(t)$.

La solution est d'exploiter un calculateur numérique couplé à de l'électronique numérique pour implémenter la loi de commande. Par exemple :

- ordinateur à base de microprocesseurs cadencés par une horloge interne
- micro-contrôleurs
- DSP (Digital Signal Processing, puce à usage spécifique, non modifiable)
- Arduino

L'information est transmise par des signaux binaires eux-mêmes étant des signaux numériques. Cette information ne transporte pas l'énergie nécessaire pour contrôler le processus, mais seulement la loi de commande.

Les signaux numériques évoluent de manière discrète à des instants régulièrement espacés par un intervalle de temps donné par la période de l'horloge $T_h = \frac{1}{f_h}$.

On pose l'hypothèse que T_h est constante donc les différents instants correspondent à $k.T_h$ où $k \in \mathbb{N}$.

Définition

Le signal numérique u_k est défini comme une suite numérique :

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ k &\mapsto U_k \end{aligned}$$

Calculateurs numériques

Ils servent à implémenter les lois de commande, c'est-à-dire les règles mathématiques d'évolution des signaux.

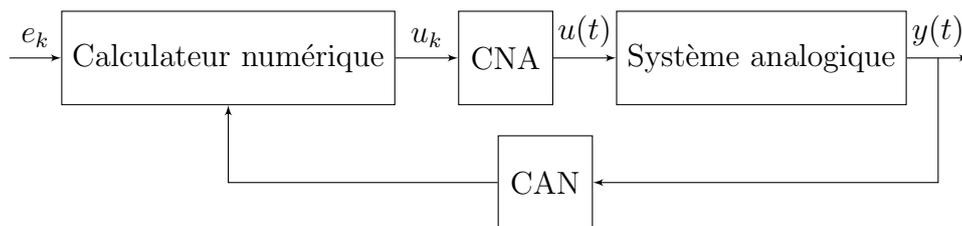


FIGURE 1.2 – Interfaçage Numérique / Analogique

Remarque :

CAN : Convertisseur Analogique Numérique

CNA : Convertisseur Numérique Analogique

L'horloge permet le fonctionnement synchrone des différents composants de la structure de l'asservissement numérique.

2 Modélisation des signaux échantillonnés

Échantillonnage

Définition

Un échantillonnage idéal à la période d'échantillonnage T_e est représenté par :

$$u(t) \quad \times \quad u^*(t)$$

T_e

— \times —

$$u^*(t) = \begin{cases} u(k.T_e) = u_k & \text{sit} = k.T_e \\ 0 & \text{sit} \neq k.T_e \end{cases}$$

Peigne de Dirac

Définition

On définit le peigne de Dirac par :

$$p(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \delta_0(t - k.T_e)$$

On peut donc réécrire l'expression de l'échantillonnage :

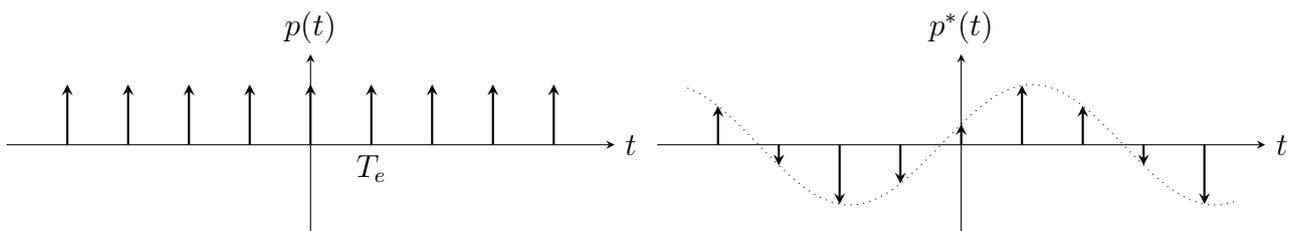


FIGURE 1.3 – Peigne de Dirac et échantillonnage d'un signal

$$\begin{aligned}
u^*(t) &= u(t) \cdot p(t) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{N}} u(t) \delta_0(t - k.T_e) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{N}} u(k.T_e) \delta_0(t - k.T_e) \\
u^*(t) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k \delta_0(t - k.T_e)
\end{aligned}$$

3 Transformée en z et lien avec Fourier / Laplace

Soit $f(t)$ un signal.

$$\text{Transformée de Laplace : } L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

$$\text{Signal échantillonné : } f^*(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k \delta_0(t - k.T_e)$$

On calcule la transformée de Laplace du signal échantillonné :

$$\begin{aligned}
F^*(p) &= L\{f^*(t)\} \\
&= \int_0^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k \delta_0(t - k.T_e) e^{-tp} dt \\
&= \int_0^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k e^{-k.T_e p} \delta_0(t - k.T_e) dt \\
&= \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k e^{-k.T_e p} \\
F^*(p) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k (e^{-T_e p})^{-k}
\end{aligned}$$

En notant $z = e^{T_e p}$, on obtient

$$F(z) = F^*(p) \Big|_{z=e^{T_e p}}$$

Transformée en z **Définition**

On définit la transformée en z du signal numérique f_k :

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} \quad , z = e^{T_e p}$$

On note $F(z) = Z\{f_k\}$

Proposition

La transformée en z est **linéaire** :

$$Z\{\alpha u_k + \beta f_k\} = \alpha U(z) + \beta F(z)$$

Si R_u et R_f sont les rayons de convergence de $U(z)$ et de $F(z)$, alors

$$R_{\alpha u + \beta f} = \max\{R_u, R_f\}$$

Produit de convolution**Définition**

On définit le produit de convolution entre deux signaux u_k et f_k :

$$\begin{aligned} u_k * f_k &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n f_{k-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n f_{k-n} \quad \text{pour } u \text{ et } f \text{ causaux} \end{aligned}$$

$$Z\{u_k * f_k\} = U(z) \cdot F(z)$$

Théorèmes importants**Théorème (*Théorème d'avance*)**

$$Z\{u_{k+d|d \in \mathbb{N}^*}\} = z^d U(z) - z^d \sum_{i=0}^{d-1} u_i z^{-i}$$

Théorème (Théorème du retard)

$$Z\{u_{k-d}|d \in \mathbb{N}^*\} = z^{-d}U(z)$$

Théorème (Théorème de la sommation)

$$Z\left\{\sum_{k=0}^n u_k\right\} = \frac{z}{z-1}U(z)$$

Théorème (Théorème de la valeur initiale)

$$\lim_{k \rightarrow 0} u_k = \lim_{z \rightarrow \infty} U(z)$$

Théorème (Théorème de la valeur finale)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z}U(z)$$

Cette limite est définie lorsque les pôles de $\frac{z-1}{z}U(z)$ sont à l'intérieur du cercle de rayon 1.

Proposition (Multiplication par le temps)

Soit $x(t) = te(t)$.

$$x^*(nT_e) = x_n = nT_e e_n$$

$$X(z) = Z[x_n] = -zT_e \frac{\partial E(z)}{\partial z}$$

Lien avec la transformée de Fourier

On peut considérer le peigne de Dirac $p(t)$ comme une fonction T_e -périodique, donc on peut la décomposer en série de Fourier :

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_0(t - nT_e) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{2\pi kt}{T_e}}$$

$$\text{où } c_k = \int_{-T_e/2}^{T_e/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \delta_0(t - nT_e) e^{-j\frac{2\pi kt}{T_e}} \right) dt = \dots = \frac{1}{T_e}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 f^*(t) &= f(t) \cdot p(t) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j \frac{2\pi k t}{T_e}} \\
 F^*(p) &= \frac{1}{T_e} \int_0^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j \frac{2\pi k t}{T_e}} \right) e^{-pt} dt \\
 &= \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(t) e^{-(p - j \frac{2\pi k}{T_e})t} dt \right) \\
 F^*(p) &= \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(p - j \frac{2\pi k}{T_e}\right)
 \end{aligned}$$

Le spectre de $f^*(t)$ est périodique en fréquence, de période $\frac{2\pi}{T_e}$. FAIRE UNE FIGURE PROPRE !!

Reconstitution d'un signal

Théorème

Un signal analogique $f(t)$ dont la transformée de Fourier est nulle à l'extérieur de l'intervalle $[-\omega_0, \omega_0]$, $\omega_0 > 0$, est parfaitement défini par ses échantillons $f_k = f(kT_e)$ si

$$F_e = \frac{1}{T_e} \text{ vérifie } \omega_e > 2\omega_0 : \text{Condition de Shannon}$$

Dans ce cas, on peut reconstituer le signal :

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \operatorname{sinc}\left(\omega_e \frac{t - kT_e}{2}\right)$$

Preuve : à base de développement en série de Fourier.

Remarque : la méthode de reconstruction de $f(t)$ n'est pas causale car elle suppose de connaître le signal à tout instant. En pratique, on préfère utiliser un CNA pour des applications en temps réel.

4 Transformée en z inverse

Soit $F(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fraction rationnelle propre (degré du numérateur < degré du dénominateur).

Problématique

Déterminer les échantillons $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tel que

$$F(z) = Z\{(f_k)_{k \in \mathbb{N}}\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}$$

4.1 Méthode par décomposition en éléments simples

On applique cette méthode à $\frac{F(z)}{z}$ plutôt qu'à $F(z)$, en utilisant les transformées usuelles.

Cas où $F(z)$ possède des pôles distincts non nuls

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{\dots}{(z-p_1)\dots(z-p_n)} \\ \frac{F(z)}{z} &= \frac{\dots}{z(z-p_1)\dots(z-p_n)} \\ &= \frac{C_0}{z} + \frac{C_1}{z-p_1} + \dots \\ F(z) &= C_0 + \frac{C_1 z}{z-p_1} + \dots \text{ où } C_0 = F(0) \text{ et } C_i = \lim_{z \rightarrow p_i} \frac{z-p_i}{z} F(z) \end{aligned}$$

De plus, on a

$$Z^{-1}\left\{\frac{C_j z}{z-p_j}\right\} = C_j p_j^k \text{ pour } i \leq j \leq n$$

Exemple :

$$W(z) = \frac{z+3}{(z-1)(z+2)}$$

Décomposition en éléments simples

$$\begin{aligned} \frac{W(z)}{z} &= \frac{z+3}{z(z-1)(z+2)} = -\frac{3/2}{z} + \frac{4/3}{z-1} + \frac{1/6}{z+2} \\ W(z) &= -\frac{3}{2} + \frac{4}{3} \frac{z}{z-1} + \frac{1}{6} \frac{z}{z+2} \\ w_k &= -\frac{3}{2} \delta_k + \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{6}(-2)^k\right) \mathbf{1}_k \end{aligned}$$

Cas où $F(z)$ possède un pôle multiple non nul, de multiplicité l supérieure ou égale à 1

$$W(z) = \dots + \frac{C_1 z}{z-p} + \frac{C_2 z}{(z-p)^2} + \dots + \frac{C_l z}{(z-p)^l} + \dots$$

On a alors, $\forall j = 0, 1, \dots, l-1$

$$C_{l-j} = \lim_{z \rightarrow p} \left(\frac{1}{j!} \frac{\partial^j \left(\frac{z-p}{z} W(z) \right)}{\partial z^j} \right)$$

$$Z^{-1}\left\{\frac{z}{(z-p)^l}\right\} = \frac{1}{(l-1)!}k(k-1)\dots(k-l+2)p^{k-l+1}, k \geq 0$$

Exemple dans le poly.

Cas d'un pôle nul, de multiplicité l supérieure ou égale à 1

$$W(z) = \dots + C_0 + \frac{C_1 z}{z} + \frac{C_2 z}{z^2} + \dots$$

On a alors, $\forall j = 0, 1, \dots, l$

$$C_{l-j} = \lim_{z \rightarrow p} \left(\frac{1}{j!} \frac{\partial^j \frac{z^l}{z} W(z)}{\partial z^j} \right)$$

$$Z^{-1}[z^{-d}] = \delta_{k-d}$$

Remarque :

$$\frac{z}{z-D} = \frac{1}{1-Dz^{-1}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N (z^{-1}D)^k = \sum_{k=0}^{\infty} D^k z^{-k}$$

On en déduit facilement que $Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-D}\right\} = D^k$

4.2 Méthode des résidus

Méthode non exigée, voir polycopié

5 Modélisation des CAN et CNA

5.1 Convertisseur analogique numérique

Problématique :

$$y(t) \rightarrow \boxed{\text{CAN}} \rightarrow y_k$$

1. Échantillonnage : (discrétisation de l'axe des abscisses)
on échantillonne sur les instants kT_e
2. Quantification du signal : (discrétisation de l'axe des ordonnées)
On a $q = \frac{u_{MAX} - u_{MIN}}{2^n}$, avec n le nombre de bits de codages, indiquant le qualité, la précision du convertisseur.

La limitation d'amplitude est source de saturation du signal échantillonné. La quantification génère un bruit sur le signal en sortie du CAN (appelé bruit de quantification). Ce bruit peut être modélisé par une variable aléatoire de moyenne nulle, de répartition uniforme et de variance donnée par $q^2/12$.

Dans le cadre de ce cours, on fera l'hypothèse que la quantification ne génère pas de bruit de quantification. Il n'y auras pas non plus de saturation : on parle de numérisation parfaite.

Remarque : ces opérations induisent également des retards de l'information.

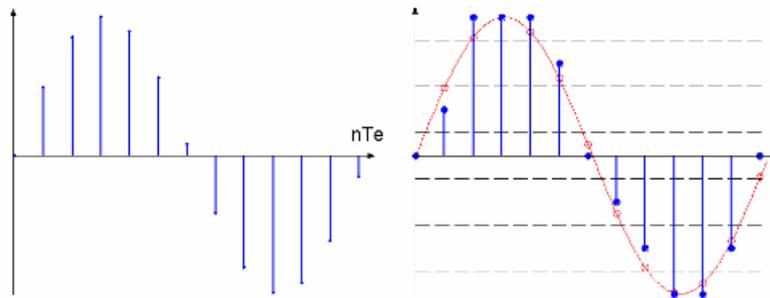


FIGURE 1.4 – Discrétisation et échantillonnage

Conséquence : en amont du CAN, on place un FAR¹, un filtre analogique passe-bas.

Convertisseur Numérique Analogique

Problématique : transformer un échantillon numérique en signal analogique défini $\forall t$.

Challenge théorique : quel comportement entre $(k-1)T_e$ et kT_e .

Idée : extrapolation des échantillons entre 2 instants d'échantillonnage.

Cas du Bloqueur d'Ordre Zéro $B_0(p)$ fonction de transfert du filtre réalisant le BOZ.

$$b_0(t) = 1_0^+(t) - 1_0^+(t - T_e)$$

Donc par transformée de Laplace inverse,

$$B_0(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-T_e p}$$

$$B_0(p) = \frac{1 - e^{-T_e p}}{p}$$

1. Filtre anti-repliement de spectre

Chapitre 2

Fonctions de transfert en z

Rappel : filtre analogique linéaire

$$e(t) \rightarrow \boxed{G(p)} \rightarrow s(t)$$

$$s(t) = g(t) * e(t)$$

$$S(p) = G(p)E(p)$$

1 Premières propriétés

Théorème

Si on applique un échantillonnage en entrée de $e(t)$,

$$s(t) = g(t) * e^*(t)$$

1. $s^*(t) = g^*(t) * e^*(t)$ où $g^*(t)$ est l'échantillonnage de $g(t)$

2. $s_n = g_n * e_n = \sum_{k=0}^n g_{n-k} e_k$

Démonstration : 1.

$$g^*(t) * e^*(t) = \int_0^\infty g^*(t - \tau) e^*(\tau) d\tau = \dots$$

2.

$$s^*(t) = s(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta_0(t - kT_e) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k \delta_0(t - kT_e)$$

$$\begin{aligned}
\text{Or, } s(t) &= \int_0^\infty g(t - \tau)e^*(\tau)d\tau \text{ avec } e^*(t) = \sum_{k=0}^\infty e_k\delta_0(t - kT_e) \\
\text{donc } s(t) &= \int_0^\infty g(t - \tau)\left(\sum_{k=0}^\infty e_k\delta_0(\tau - kT_e)\right)d\tau \\
&= \sum_{k=0}^\infty e_k \int_0^\infty g(t - \tau)\delta_0(\tau - kT_e)d\tau \\
&= \sum_{k=0}^\infty e_k g(t - kT_e) \\
s_n = s(nT_e) &= \sum_{k=0}^\infty e_k g((n - k)T_e) = \sum_{k=0}^\infty e_k g_{n-k}
\end{aligned}$$

Application : Discrétisation d'un système analogique avec CNA + BOZ

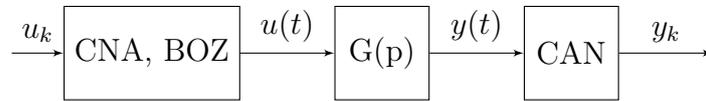


FIGURE 2.1 – Discrétisation d'un système analogique

Hypothèse : Synchronisation des convertisseurs

$$u_k \rightarrow \boxed{H(z)} \rightarrow y_k$$

Fonction de transfert pour asservissement numérique

On cherche à déterminer la fonction de transfert $H(z) = \frac{Y(z)}{U^*(z)}$ de l'asservissement numérique suivant :



FIGURE 2.2 – Asservissement numérique

Théorème

$$H(z) = (1 - z^{-1})Z\left[*L^{-1}\left[\frac{G(p)}{p}\right]\right]$$

Démonstration:

$$\begin{aligned}
Y(p) &= B_0(p)G(p)U^*(p) \\
&= (1 - e^{-T_e p})\frac{G(p)}{p}U^*(p) \\
&= \frac{G(p)}{p}U^*(p) - \frac{G(p)}{p}U^*(p)e^{-T_e p}
\end{aligned}$$

2. OBTENTION D'UNE FONCTION DE TRANSFERT EN Z À PARTIR D'UNE ÉQUATION RÉCURRENT

On pose $\tilde{G}(p) = \frac{G(p)}{p}$

$$Y(p) = \tilde{G}(p)U^*(p) - \tilde{G}(p)U^*(p)e^{-T_e p}$$

Avec $\tilde{Y}(p) = \tilde{G}(p)U^*(p)$, par transformation inverse de Laplace,

$$\tilde{y}(t) = \tilde{g}(t) * u^*(t)$$

$$\tilde{y}_n = \tilde{g}_n * u_n$$

$$\tilde{Y}(z) = \tilde{G}(z)U(z)$$

$$\text{Ainsi, } Y(z) = \tilde{Y}(z) - z^{-1}\tilde{Y}(z)$$

$$= (1 - z^{-1})\tilde{Y}(z)$$

$$H(z) = (1 - z^{-1})\tilde{G}(z)$$

$$H(z) = (1 - z^{-1})Z[*L^{-1}[\tilde{G}(p)]]$$

Remarque : comment choisir T_e ? Tout système physique peut être représenté par un filtre passe-bas :

$$\text{Règle empirique : } 6f_c \leq f_e \leq 24f_c$$

Propriétés des systèmes discrétisés

1. Un système analogique linéaire reste linéaire après discrétisation.
2. L'ordre du système est conservé.
3. Les pôles du système discrétisé p_d sont liés aux pôles du système analogique $p_c = e^{T_e p_c}$ (cela vient de $z = e^{T_e p}$). Attention, c'est faux pour les zéros!
4. La discrétisation d'une association en série n'est pas identique à la mise en série des discrétisés.

2 Obtention d'une fonction de transfert en z à partir d'une équation récurrente

$$a_n y_{k+n} + \dots + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = b_m u_{k+m} + \dots + b_1 u_{k+1} + b_0 u_k$$

$$\text{avec } a_i, b_j \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$$

Par causalité, on a $n \geq m$.

Rappel : Théorème d'avance

$$Z[u_{k+d} | d \in \mathbb{N}^*] = z^d U(z) - z^d \sum_{i=0}^{d-1} u_i z^{-i}$$

On applique la transformée en z à $(EQ_n) = a_n y_{k+n} + \dots + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{l}
 a_n y_{k+n} \\
 + a_{n-1} y_{k+N-1} \\
 \dots \\
 + a_1 y_{k+1} \\
 + a_0 y_k
 \end{array} & \rightarrow TZ \rightarrow & \begin{array}{l}
 a_n z^n Y(z) \\
 + a_{n-1} z^{n-1} Y(z) \\
 \dots \\
 + a_1 z^{n-1} Y(z) \\
 + a_0 z Y(z)
 \end{array} & \begin{array}{l}
 -a_n [y_0 \dots y_{n-1}] [z^n \dots z]^T \\
 -a_{n-1} [0, y_0 \dots y_{n-2}] [z^n \dots z]^T \\
 \dots \\
 -a_1 [0, \dots, 0, y_0] [z^n \dots z]^T
 \end{array} \\
 \hline
 TZ(EQ_n) & = & (\sum_{l=0}^n a_l z^l) Y(z) & -CI_y(z)
 \end{array}$$

On fait de même avec $(EQ_m) = b_m u_{k+m} + \dots + b_1 u_{k+1} + b_0 u_k$.

Conditions initiales données : les $y_k, k = 0, \dots, n-1$ et $u_k, k = 0, \dots, m-1$

$$\begin{aligned}
 CI_y(z) &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{l=0}^j a_{n-l} y_{l-j} \right) z^{n-j} \\
 CI_u(z) &= \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sum_{l=0}^j b_{m-l} u_{l-j} \right) z^{n-j}
 \end{aligned}$$

Ainsi, en posant

$$A(z) = \sum_{l=0}^n a_l z^l \text{ et } B(z) = \sum_{l=0}^m b_l z^l$$

$$A(z)Y(z) - CI_y(z) = B(z)U(z) - CI_u(z)$$

$$\boxed{Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)}U(z) + \frac{CI_y(z) - CI_u(z)}{A(z)}}$$

On pose $G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$, appelée fonction de transfert du système.

$$Y(z) = G(z)U(z) + \frac{CI(z)}{A(z)}$$

$$\text{où } CI(z) = CI_y(z) - CI_u(z)$$

$$\text{À CI nulles, } Y(z) = G(z)U(z)$$

Définitions

Les pôles (zéros) du système sont les racines de $A(z)$ ($B(z)$).

Le gain statique (si défini) est $\lim_{z \rightarrow 0} G(z)$.

Lorsqu'il n'y a plus de simplifications possibles entre pôles et zéros dans $G(z)$, on parle de fonction de transfert minimale. Alors, le degré de $A(z)$ désigne l'ordre du système.

3 Réponse temporelle de système à temps discret

On considère le système à temps discret :

$$u_k \rightarrow \boxed{G(z)} \rightarrow y_k$$

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \text{ et } A(z) = \sum_{l=0}^n a_l z^l, B(z) = \sum_{l=0}^m b_l z^l$$

3.1 Calcul à partir de la relation de récurrence

On effectue un changement de variable muet pour exprimer y_k en fonction des instants précédents.

$$a_n y_{k+n} + \dots + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = b_m u_{k+m} + \dots + b_1 u_{k+1} + b_0 u_k$$

$$a_n y_k = -a_{n-1} y_{k-1} - \dots - a_1 y_{k-n+1} - a_0 y_{k-n} + b_m u_{k+m-n} + \dots + b_1 u_{k-n+1} + b_0 u_{k-n}$$

Intérêt : pratique pour le calcul en temps réel (simulation, implantation systèmes embarqués...). Les CI $y_{-1}, y_{-2} \dots$ sont à préciser

3.2 Calcul à partir de la fonction de transfert

Si les CI sont nulles :

$$Y(z) = G(z)U(z)$$

$$y_k = Z^{-1}[G(z)U(z)]$$

En pratique, on effectue une décomposition en éléments simples de $\frac{Y(z)}{z}$ et on applique $Z^{-1}[\cdot]$ à $Y(z)$ en utilisant le tableau des transformées en z usuelles.

Exemple :

On cherche la réponse impulsionnelle ($u_k = \delta_k$) de

$$G(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

On effectue la décomposition en éléments simples de $\frac{Y(z)}{z}$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

$$= \frac{1}{2z} - \frac{1}{2(z-1)} + \frac{1}{2(z-2)}$$

$$Y(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{z}{z-1} + \frac{1}{2} \frac{z}{z-2}$$

$$y_k = \frac{1}{2} \delta_k + \frac{1}{2} 2^k - 1$$

SI les CI non nulles et connues :

$$Y(z) = G(z)U(z) + \frac{CIy(z) - CIu(z)}{A(z)}$$

$$y_k = Z^{-1}\left[G(z)U(z) + \frac{CIy(z) - CIu(z)}{A(z)}\right]$$

3.3 Par décomposition modale

$$G(z) = \frac{b_m z^m + \dots + b_0}{a_n z^n + \dots + a_0} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$= \frac{K(z - z_1)^{\alpha_1} (z - z_2)^{\alpha_2} \dots (z - z_r)^{\alpha_r}}{(z - p_1)^{\gamma_1} (z - p_2)^{\gamma_2} \dots (z - p_q)^{\gamma_q}} \text{ avec } \sum_1^q \gamma_i = n, \sum_1^r \alpha_i = m$$

γ_i est la multiplicité algébrique du pôle $p_i \in \mathbb{C}$.

α_i est la multiplicité algébrique du zéro $z_i \in \mathbb{C}$

Avec l'hypothèse $a_n = 1$, $A(z)$ est un polynôme appelé Monique.

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{G(z)U(z)}{z} \text{ où } U(z) \text{ quelconque, de pôles } r_1, \dots, r_u$$

$$\text{d'où } Y(z) = Y(0) + \sum_{i=1}^q G_i(z) + \sum_{i=1}^{r_u} U_i(z)$$

Remarque : $U(z)$ influence la décomposition de $G(z)$ et vice-versa.

$$G_i(z) = \sum_{j=1}^{\gamma_i} \frac{c_{ij} z}{(z - p_j)^j}$$

$$g_{i_k} = Z^{-1}[G_i(z)]$$

$$= (c_0 + c_1 k + \dots + c_{\gamma_i-1} k^{\gamma_i-1}) p_i^k = P_i(k) p_i^k$$

g_{i_k} correspond à l'évolution de la sortie y_k due au pôle p_i : mode p_i .

La sortie y_k est construite à partir de la contribution de chaque mode (et du type d'entrée)

$$y_k = Y(0)\delta_k + \sum_{i=1}^q g_{i_k} + Z^{-1}\left[\sum_{i=1}^{r_u} U_i(z)\right]$$

où

$\sum_{i=1}^q g_{i_k}$ est l'excitation des modes par l'entrée y_k
 $Z^{-1}\left[\sum_{i=1}^{r_u} U_i(z)\right]$ le régime forcé par u_k

3.3.1 Mode réel

- $|p_i| < 1 \Rightarrow P_i(k)p_i^k \rightarrow_{\infty} 0$: mode convergent
- $|p_i| > 1 \Rightarrow P_i(k)p_i^k$ divergence exponentielle
- $|p_i| = 1$ et $P_i(k) = c_0$ constant \rightarrow mode entretenu (ni convergence, ni divergence)
- $|p_i| = 1$ et $\gamma_i > 1$, $P_i(k)p_i^k \rightarrow$ divergence polynomiale
 - Si $p_i > 0$ alors $P_i(k)p_i^k$ tend à être du même signe : mode aperiodique
 - Si $p_i < 0$ alors $P_i(k)p_i^k = (-1)^k |p_i|^k P_i(k)$ change de signe en fonction de la parité de k : mode oscillant
 - Si $p_i = 0 \rightarrow P_i(k)p_i^k = 0 \forall k \geq 1$: mode à réponse pile

Remarque : un pôle discret nul $p_i = 0$ possède un équivalent en temps continu à partie réelle infiniment négative :

$$p_i = e^{T_e p_{ci}} = 0 \Leftrightarrow p_i \rightarrow -\infty$$

3.3.2 Mode complexe

À un pôle p_i complexe correspond son conjugué \bar{p}_i :

$$P_{a_i}(k)p_i^k + P_{b_i}(k)\bar{p}_i^k = \dots = P(k)\rho_i^k \sin(k\theta_i + \phi)$$

où $p_i = \rho_i e^{j\theta_i}$ et ϕ dépend du contexte.

- $|p_i| = \rho_i > 1$: divergence
- $|p_i| = \rho_i < 1$: convergence en ρ_i^k
- $|p_i| = \rho_i = 1$
 - si multiplicité de $p_i = 1$: mode entretenu
 - si multiplicité de $p_i > 1$: divergence
- $\theta_i \neq 0$ oscillation à la fréquence θ

4 Stabilité

Définition

[Stabilité EBSB] Un système discret est stable au sens EBSB si pour toute entrée u_k bornée, y_k reste bornée.

Théorème (Stabilité et réponse impulsionnelle)

Un système est stable au sens EBSB si et seulement si sa réponse impulsionnelle est absolument sommable, c'est-à-dire $\sum_{k=0}^{\infty} |g_k| < \infty$

Théorème : stabilité et pôles

Théorème (*Stabilité et pôles*)

Un système discret est stable au sens EBSB si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert en z sont à l'intérieur du cercle unité (strictement, pas sur le cercle).

Remarque : cela suppose le calcul des pôles de $G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$

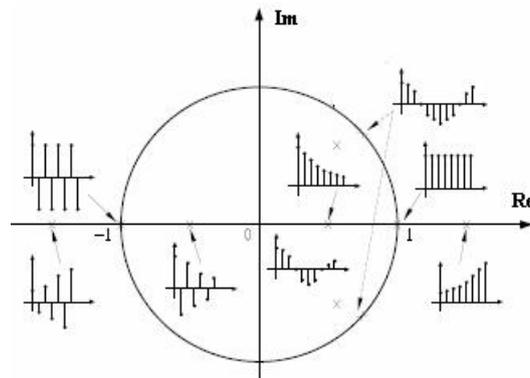


FIGURE 2.3 – Allure de la réponse temporelle en fonction de la position des pôles dans le plan z

Critère de Jury

À savoir utiliser, voir polycopié.

Critère de Routh-Hurwitz

À connaître par coeur, voir polycopié.

Rappel : En temps continu, le critère de Routh-Hurwitz permet de déterminer le nombre de racines instables de l'équation caractéristique, c'est-à-dire à partie réelle strictement positive.

Transformation en w :

$$z = \frac{1+w}{1-w}, \quad w \neq 1$$

$$w = \frac{z-1}{z+1}, \quad z \neq -1$$

Cette transformation transforme le disque unité du plan en z , en le demi-plan ouvert gauche du plan en w .

Cette transformation étant bijective, on l'utilise pour appliquer le critère de Routh au polynôme en la variable w .

Critère de stabilité de Schur-Cohn

Non exigible, voir polycopié.

Critère de stabilité de Nyquist

À connaître par coeur, voir polycopié.

5 Transposition des méthodes analogiques

5.1 Approximation du BOZ par un retard équivalent

On rappelle l'expression de la fonction de transfert du BOZ :

$$\begin{aligned}
 B_0(p) &= \frac{1 - e^{-T_e p}}{p} \\
 &= \frac{e^{-\frac{T_e}{2}p}(e^{\frac{T_e}{2}p} - e^{-\frac{T_e}{2}p})}{p} \\
 \text{Or, } e^{-\frac{T_e}{2}p} &= 1 - \frac{T_e}{2}p + o\left(\frac{T_e}{2}p\right) \\
 e^{-\frac{T_e}{2}p} &= 1 + \frac{T_e}{2}p + o\left(\frac{T_e}{2}p\right) \\
 \text{Donc } \boxed{B_0(p) \approx T_e e^{-\frac{T_e}{2}p}}
 \end{aligned}$$

5.2 Approximation de Padé pour les retards

Cette approximation repose sur le développement de Taylor du terme de retard exponentiel. Elle fournit une fraction rationnelle causale.

À l'ordre 1,

$$e^{-T_e p} = \frac{e^{-\frac{T_e}{2}p}}{e^{+\frac{T_e}{2}p}} = \frac{1 - \frac{T_e}{2}p}{1 + \frac{T_e}{2}p}$$

À l'ordre 2,

$$e^{-T_e p} = \frac{1 - \frac{T_e}{2}p + \frac{T_e^2}{8}p^2}{1 + \frac{T_e}{2}p + \frac{T_e^2}{8}p^2}$$

Application au BOZ :

$$\boxed{B_0(p) \approx \frac{T_e}{1 + \frac{T_e}{2}p}}$$

Conséquence : on peut donc appliquer les résultats des systèmes analogiques sur le système équivalent obtenu.

5.3 Correction numérique obtenue par discrétisation approchée d'un correcteur continu

Approximation de l'opérateur intégral

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \int_0^t e(\tau) d\tau \\
 x_k &= x(kT_e) = \int_0^{kT_e} e(\tau) d\tau \\
 x_k &= \sum_{j=0}^k e_j T_e
 \end{aligned}$$

Approximation d'Euler arrière

$$\begin{aligned}
 \frac{de(t)}{dt} &= \frac{e_k - e_{k-1}}{T_e} \\
 pE(p) &= \frac{1 - z^{-1}}{T_e} E(z)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{p = \frac{z - 1}{zT_e}}$$

Approximation d'Euler avant

$$\begin{aligned}
 \frac{de(t)}{dt} &= \frac{e_{k+1} - e_k}{T_e} \\
 pE(p) &= \frac{z - 1}{T_e} E(z)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{p = \frac{z - 1}{T_e}}$$

Approximation de Tustin

$$\begin{aligned}
 x_k - x_{k-1} &= \frac{1}{2}(e_k + e_{k-1})T_e \\
 (1 - z^{-1})X(z) &= \frac{T_e}{2}(1 + z^{-1})E(z) \\
 X(z) &= \frac{T_e}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} E(z) \\
 &= \frac{T_e}{2} \frac{z + 1}{z - 1} E(z)
 \end{aligned}$$

D'où

$$p = \frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}$$

Remarque : semblable à la transformation en w .

Remarque : les approximations de p induisent des distorsions fréquentielles.

Exemple : correcteur continu $R_C(p)$

$$R_d(z) = R_c(p) \Big|_{p=\frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}}$$

Réponse fréquentielle : $z = e^{T_e p}$, $p = j\omega$

$$\begin{aligned} R_d(e^{jT_e\omega}) &= R_c\left(\frac{2}{T_e} \frac{jT_e\omega - 1}{jT_e\omega + 1}\right) \\ \frac{jT_e\omega - 1}{jT_e\omega + 1} &= j \tan\left(\frac{T_e}{2}\omega\right) \\ R_d(e^{jT_e\omega}) &= R_c\left(j \frac{2}{T_e} \tan\left(\frac{T_e}{2}\omega\right)\right) \\ &= R_c(j\tilde{\omega}) \text{ où } \tilde{\omega} = \frac{2}{T_e} \tan\left(\frac{T_e}{2}\omega\right) \end{aligned}$$

$\tilde{\omega}$ est une "pseudo-pulsation" qui varie de 0 à $+\infty$ lorsque ω varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Cela correspond à une distorsion de l'échelle fréquentielle.

Approximation de Tustin adaptée à la pulsation ω_c

On voudrait que $R_d(e^{j\omega_c T_e}) = R_c(j\omega_c)$, alors

$$p \leftarrow \frac{\omega_c}{\tan\left(\frac{\omega_c T_e}{2}\right)} \frac{z-1}{z+1}$$

$$R_c\left(j \frac{\omega_c}{\tan\left(\frac{\omega_c T_e}{2}\right)}\right) = R_c(j\omega_c)$$

Approximation par correspondance pôle-zéro

Exemple :

$$R_c(p) = \frac{p+a}{p+b}$$

$$z = e^{T_e p}$$

$$R_d(z) = \frac{z - e^{-T_e a}}{z - e^{-T_e b}} \alpha$$

$$\text{Gain statique : } \lim_{z \rightarrow 1} R_d(z) = \alpha \frac{1 - e^{-T_e a}}{1 - e^{-T_e b}} = \lim_{p \rightarrow 0} R_c(p) = \frac{a}{b}$$

$$\alpha = \frac{a}{b} \frac{1 - e^{-T_e a}}{1 - e^{-T_e b}}$$

En résumé, on construit $R_d(z)$ avec la même structure que $R_c(p)$ en termes de zéros, pôles et gain statique. Précaution à prendre lorsque le degré du numérateur de $R_c(p)$ est inférieur au degré du dénominateur de $R_c(p)$ (i.e. $R_c(p)$ strictement propre)

Exemple :

$$R_c(p) = \frac{p + a}{(p + b)(p + c)}$$

$$R_d(p) = \frac{(z + 1)(z - e^{-T_e a})}{(z - e^{-T_e b})(z - e^{-T_e c})} \alpha$$

$$R_d(1) = R_c(0) \rightarrow \alpha = \dots$$

Le terme $(z+1)$ est ajouté pour permettre d'avoir le même gain de $R_d(z)|_{z=e^{jT_e \frac{\pi}{T_e}}} = R_c(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty}$ (correspondance du gain haute fréquence).

En conclusion, le choix d'une approximation dépend beaucoup des caractéristiques (zéros, ordre,...) du système.

À savoir pour le partiel

- Transformées en z et ses propriétés
- Tous les résultats sur les filtres linéaires numériques
- Méthode d'obtention des transformées en z d'un système discrétisé
- Définitions stabilité, critères algébriques pour la caractériser (connaître Routh-Hurwitz, savoir appliquer Jury)
- Réglage d'un correcteur PID analogique, savoir passer en TD (Euler, Tustin, méthode de correspondance pour le zéro)
- Transformation en w
- Correcteur RST
- Règle des retards relatifs
- Règles de rejet de la perturbation, conséquence sur le polynôme R
- Être en mesure de déterminer les degrés de polynômes R et S pour résoudre un problème : technique de simplification de pôles / zéros, introduction de polynôme auxiliaire

Chapitre 3

Commande dans l'espace d'état

1 Concept du modèle d'état

1.1 Définitions

Soit un système Σ , à temps continu, linéaire ou non :

$$u \rightarrow \boxed{\Sigma} \rightarrow y$$

$u(t) \in \mathbb{R}^m$ commande

$y(t) \in \mathbb{R}^p$ sortie mesurée

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ vecteur d'état, et ses composantes $x_i(t) \in \mathbb{R}$ variables d'état

Définition

On appelle **équation d'état** du système (Σ) :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$: champs de vecteurs, relation non linéaire en x, u, t .

$x_0 = x(0) \in \mathbb{R}^n$: vecteur des conditions initiales.

$x(t)$ contient des grandeurs physiques ou non.

On appelle **équation d'observation** du système (Σ) :

$$y(t) = h(x(t), u(t), t) \quad (\text{équation algébrique})$$

Un **modèle d'état** est composé d'une équation d'état et d'une équation d'observation :

$$(\Sigma) \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), & x_0 = x(0) \\ y(t) = h(x(t), u(t), t) \end{cases}$$

Dans le cas discret :

$$(\Sigma) \begin{cases} x_{k+1} = f_d(x_k, u_k, k), & x_0 = x(0) \\ y_k = h_d(x_k, u_k, k) \end{cases}$$

$$u_k \in \mathbb{R}^m \rightarrow \boxed{\Sigma_d} \rightarrow y_k \in \mathbb{R}^p$$

$x_k \in \mathbb{R}^n$ vecteur de suites numériques

Systèmes stationnaires : on peut simplifier comme suit :

Continu :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), & x_0 = x(0) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases}$$

Discret :

$$\begin{cases} x_{k+1} = f_d(x_k, u_k), & x_0 = x(0) \\ y_k = h_d(x_k, u_k) \end{cases}$$

Systèmes linéaires stationnaires : on a alors :

Continu :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x_0 = x(0) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Discret :

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k, & x_0 = x(0) \\ y_k = C_d x_k + D_d u_k \end{cases}$$

$A, A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrices d'évolution

$B, B_d \in \mathbb{R}^{n \times m}$ matrices d'application de l'entrée commande u

$C, C_d \in \mathbb{R}^{p \times n}$ matrices d'observation

$D, D_d \in \mathbb{R}^{p \times n}$ matrices de transmission directe

Remarque Systèmes linéaires variant dans le temps :

Continu :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), & x_0 = x(0) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

Discret :

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_d(k)x_k + B_d(k)u_k, & x_0 = x(0) \\ y_k = C_d(k)x_k + D_d(k)u_k \end{cases}$$

Cadre du cours : systèmes linéaires, stationnaires, SISO (mono-entrée, mono-sortie).De plus, $u \in \mathbb{R}$ ($m = 1$), $y \in \mathbb{R}$ ($p = 1$).

1.2 Quelques exemples

1.2.1 Robot manipulateur à 1 bras

PFD : équation de mouvement

$$\begin{aligned} J\ddot{\theta}(t) &= C_m(t) + C_g(t) \\ J\ddot{\theta} &= C_m(t) - \frac{L}{2}mg \cos \theta \end{aligned}$$

On pose $C_m(t) = u(t)$

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{1}{J}u(t) - \frac{mgL}{2J} \cos(\theta(t))$$

On a donc :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ -\frac{mgL}{2J} \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u(t)$$

1.2.2 Cas d'un robot à n liaisons en série, n-actionné

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + g(q) = \tau$$

$$q(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \vdots \\ \theta_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_1(t) \\ \vdots \\ \tau_n(t) \end{bmatrix}$$

$M(q) = M(q)^T$	$\in \mathbb{R}^{n \times n}$	matrice d'inertie, définie positive
$C(q, \dot{q})\dot{q}$	$\in \mathbb{R}^n$	forces centrifuges et de Coriolis
$g(q) = \frac{\partial u(q)}{\partial q}$	$\in \mathbb{R}^n$	énergie potentielle totale due à la gravité
$D\dot{q}$		frottements visqueux dans les liaisons

$$x(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ \ddot{q}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ -M^{-1}(q)C(q, \dot{q})\dot{q} - M^{-1}D\dot{q} - M^{-1}(q)g(q) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n \times n} \\ M^{-1} \end{bmatrix} u(t)$$

1.2.3 Circuit avec diode à effet tunnel

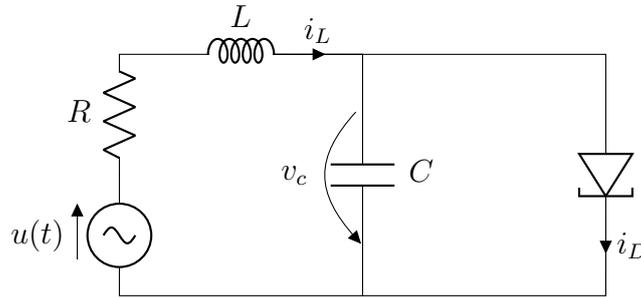


FIGURE 3.1 – Montage étudié

Lois de Kirchoff :

$$\text{Noeud A : } i_L = i_C + i_D = h(v_D) + v_C$$

$$\Rightarrow C \frac{dv_D}{dt} = i_L - h(v_D)$$

$$\text{Maille 1 : } u(t) - Ri_L(t) - L \frac{di_L}{dt} - v_C(t) = 0$$

$$\Rightarrow Ri_L + L \frac{di_L}{dt} + v_D = u(t)$$

$$\text{Maille 2 : } v_C(t) = v_D(t)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_L \\ v_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \text{ 2 variables d'état}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L}i_L & -\frac{1}{L}v_D \\ \frac{1}{C}i_L & -\frac{1}{C}h(v_D) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

2 Quelques propriétés de base, valables à temps continu ou discret

2.1 Non-unicité d'un modèle d'état

Cas continu :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x_0 = x(0) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Soit $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible. Soit $z(t) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x(t) = Tz(t)$. et T invariante dans le temps.

$$\begin{cases} T\dot{z}(t) = AT(t) + Bu(t) \\ y(t) = CTz(t) + Du(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = T^{-1}ATz(t) + T^{-1}Bu(t) \\ y = CTz(t) + Du(t) \end{cases} \text{ avec } z(0) = T^{-1}x_0$$

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \tilde{A}z(t) + \tilde{B}z(t) \\ y = \tilde{C}z(t) + Du(t) \end{cases}$$

D est invariant par changement de coordonnées régulier ($x(t) = Tz(t)$)

Proposition

Il existe une infinité de modèles d'état pour un même système (linéaire et stationnaire).

Remarque voir plus bas quelques changement de coordonnées vers des formes d'état cano- niques.

2.2 Solution de l'équation d'état

2.2.1 Exponentiel d'une matrice

Définition

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

$$\forall A \in \mathbb{K}^{n \times n}, e^A \in \mathbb{K}^{n \times n} \text{ et } e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

On admet la convergence de la série.

Remarque $e^{0_{n \times n}} = 1_n$

Proposition

$$e^A = \lim_{k \rightarrow \infty} (1_n + \frac{1}{k}A)^k$$

1. $(e^A)^T = e^{A^T}$
2. e^A inversible et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$
3. Si $A = \text{diag}(A_k)$ où $A_k \in \mathbb{K}^{n_i \times n_i}$, $i=1..k$, $e^A = \text{diag}(e^{A_k})$
4. Soit X inversible $\in \mathbb{K}^{n \times n}$, $e^{XAX^{-1}} = Xe^AX^{-1}$
5. Si $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sont similaires e^A et e^B sont similaires aussi
6. Si $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sont similaires et unitaires e^A et e^B le sont aussi
7. Si A est hermitienne ($A = \overline{A}^T$) alors e^A est définie positive
8. Si A est anti-hermitienne, alors e^A est unitaire
9. Si A est normale ($AA^* = A^*A$), alors e^A est normale aussi

Proposition

$$t \in \mathbb{R}, \frac{de^{At}}{dt} = Ae^{tA} = e^{tA}A$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \\ \frac{de^{At}}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k \\ &= A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^{k-1} = Ae^{tA} \end{aligned}$$

■

PropositionSoient $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$

1.

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad AB = BA \Leftrightarrow e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)}$$

2.

$$\text{si } AB = BA, \text{ alors } e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$$

ThéorèmeSoit $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{k=0}^{n-1} \Psi_k(t) A^k, \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ e^{tA} &= \frac{1}{2\pi j} \int_C (z1_n - A)^{-1} e^{tz} dz \end{aligned}$$

où C est un contour fermé du plan complexe contenant $\text{Spec}(A)$ (valeurs propres de A)

Soit P_A le polynôme caractéristique de A

$$P_A(s) = \det(s1_n - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0, \quad a_j \in \mathbb{R}, j = 0 \dots n-1$$

2. QUELQUES PROPRIÉTÉS DE BASE, VARIABLES À TEMPS CONTINU OU DISCRET 35

On montre que

$$sP_A^{(k+1)}(s) = P_A^{(k)}(s) - a_k, \quad k = 0, \dots, n-1 \text{ avec } P_A^{(0)}(s) = P_A(s) \text{ et } P_A^{(n)}(s) = 1$$

$$\Psi_k(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{P_A^{(k+1)}(z)}{P_A^{(k)}(z)} e^{tz} dz$$

On montre que $\forall k = 0, 1, \dots, n-1$ et $t \geq 0$

$$\Psi_k^{(n)}(t) + a_{n-1}\Psi_k^{(n-1)}(t) + \dots + a_1\Psi_k^{(0)}(t) + a_0\Psi_k(t) = 0$$

avec $\forall k, l = 0, \dots, n-1, k \neq l$, on a $\Psi_k^{(l)}(0) = \delta_{kl}$

Théorème

Soit $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ et $\Psi_0(t) \dots \Psi_{n-1}(t)$ définis précédemment.

Alors $\forall s \in \mathbb{C} \setminus \text{Spec}(A)$,

$$L[e^{tA}] = \int_0^\infty e^{-st} e^{At} dt = (s1_n - A)^{-1}$$

On appelle $(s1_n - A)^{-1}$ résolvante de A.

De plus,

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_k(s) &= L[\Psi_k(t)]_{k=0..n-1} \\ &= \frac{P_A^{(k+1)}(s)}{P_A^{(k)}(s)} \\ (s1_n - A)^{-1} &= L[e^{tA}] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \hat{\Psi}_k(s) A^k \end{aligned}$$

En pratique, soit $V \in \mathbb{K}^{n \times n}$ inversible, tel que $V^{-1}AV = J$, $J \in \mathbb{K}^{n \times n}$ matrice de Jordan ou bien $J = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$, λ_i valeurs propres de A

Proposition

$$A^k = VJ^kV^{-1}$$

ou bien si $J = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$,

$$A^k = V\Lambda^kV^{-1}$$

$$e^{tA} = e^{tVJV^{-1}} = Ve^{tJ}V^{-1}$$

ou si $J = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$,

$$e^{tA} = Ve^{t\Lambda}V^{-1}$$

$$\begin{aligned} \Lambda^k &= \text{diag}(\lambda_i^k) \\ e^{t\Lambda} &= \text{diag}(e^{t\lambda_i}) \end{aligned}$$

2.2.2 Cas analogique

Théorème

La solutions de l'équation d'état est :

$$(S) : \begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu, & x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y &= Cx + Du \end{cases}$$

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ e^{-tA}(\dot{x} - Ax) &= e^{-tA}Bu \\ \int \frac{d}{dt}(e^{-tA}x(t)) &= \int e^{-tA}Bu(t) \\ e^{-tA}x(t) - e^{-t_0A}x_0 &= \int_{t_0}^t e^{-\tau A}Bu(\tau)d\tau \text{ avec } t_0 = 0 \end{aligned}$$

Réciproquement

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ae^{tA}x_0 + \frac{d}{dt} \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ &= Ae^{tA}x_0 + \int_0^t Ae^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau + Bu(t) \\ &= A(e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau) + Bu(t) \\ &= Ax(t) + Bu(t) \end{aligned}$$

■

2.2.3 Cas discret

Théorème

Dans le cas discret , les solutions de l'équation d'état sont :

$$(S) : \begin{cases} x_{k+1} &= A_d x_k + B_d u_k, & x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y_k &= C_d x_k + D_d u_k \end{cases}$$

$$\begin{array}{l|l} k=0 & x_1 = A_d x_0 + B_d u_0 \\ k=1 & x_2 = A_d x_1 + B_d u_1 \\ & \quad A_d^2 x_0 + A_d B_d u_0 + B_d u_1 \\ & \quad \vdots \\ \forall k & x_k = A_d^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A_d^{k-1-j} B_d u_j \end{array}$$

2.3 Modèle d'état pour quelques associations de systèmes (TD1)

3 Commandabilité et observabilité

Problème : existe-t-il une commande $u(t)$ permettant de passer d'un point de fonctionnement à $t = t_1$ à un autre à $t = t_2$?

3.1 Commandabilité

Définition

Cas analogique Le système (Σ) est dit commandable si

$$\forall x(t = t_0) = x_0 \in \mathbb{K}^n \text{ et } \forall x_f = x(t = t_f) \in \mathbb{K}^n$$

il existe une commande $u(t)$ continue (par morceaux) qui amène l'état $x(t)$ de l'état x_0 à $t = t_0$ vers x_f à $t = t_f$.

Cas discret Le système (Σ_d) est commandable si

$$\forall x_d \in \mathbb{K}^n \text{ et } \forall x_f \in \mathbb{K}^n$$

il existe une séquence d'échantillons de commande $[u_0, u_1, \dots, u_k]$ qui amène le système Σ_d de l'état de x_d pour $k = 0$ à x_f pour $k = n$.

Définition

On appelle **matrice de commandabilité** (dite de Kalman), la matrice notée (obtenue par concaténation)

$$C(A, B) = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

Théorème

Cas analogique ou discret :

Le système (Σ) est commandable si et seulement si (matrice de rang plein)

$$\text{rang}(C(A, B)) = n$$

Le système (Σ_d) est commandable si et seulement si

$$\text{rang}(C(A_d, B_d)) = n$$

On dit alors que la paire A, B est commandable.

Proposition (Corollaire spécifique aux systèmes monovariables)

Le systèmes (S) ou (S_d) est commandable si et seulement si

$$\det(\mathcal{C}(A, B)) \neq 0 \quad (\text{ou } \det(\mathcal{C}(A_d, B_d)) \neq 0)$$

Démonstration :

$$x_k = A_d^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A_d^{k-1-j} B_d u_j$$

Pour atteindre n'importe quel état de \mathbb{K}^N , il faut que

$$\text{Im}\{A_d^{k-1-j} B_d\}_{j=0\dots k-1} = \mathbb{K}^n$$

De plus, $\forall k \geq n$,

$$\text{Im}\{A_d^{k-1-j} B_d\}_{j=0\dots k-1} = \text{Im}\{A_d^{n-1-j} B_d\}_{j=0\dots n-1}$$

En effet, d'après le théorème d'Hamilton-Cayley, la matrice A est racine de son polynôme caractéristique : $P_A(A) = 0$ donc $A^n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k$.

Donc :

$$\text{Im}\{A_d^{k-1-j} B_d\}_{j=0\dots n-1} = \mathbb{K}^n \Leftrightarrow \text{rang}(\mathcal{C}(A_d, B_d)) = n$$

■

3.1.1 Cas discret**Proposition**

Soit $x_0 \in \mathbb{K}^n, x_f \in \mathbb{K}^n$,

$$x_f - A_d^n x_0 = \underbrace{[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}b]}_{\mathcal{C}(A, B)} \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix}$$

Si $\mathcal{C}(A, B)$ inversible i.e. système commandable, alors on en déduit la séquence de commande permettant de passer de x_0 à x_f pour $k = 0$ à $k = n$:

$$\begin{bmatrix} u_{n-1} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix} = \mathcal{C}(A, B)^{-1} (x_f - A_d^n x_0)$$

3.1.2 Cas continu

Définition

On définit le Gramien de commandabilité, noté $W_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$W_c(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{(t_1-\tau)A} B B^T e^{(t_1-\tau)A^T} d\tau = \int_0^{t_1-t_0} e^{\sigma A} B B^T e^{\sigma A^T} d\sigma \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

Proposition

- W_c est symétrique
- $W_c \geq 0$ ie $W_c \in S_n^+$

Théorème

Le système (Σ) d'équation d'état $\dot{x} = Ax + Bu$ est commandable si et seulement si W_c inversible, c'est-à-dire $W_c > 0$.

Démonstration :

a) W_c inversible \implies (Σ) commandable. Soient $x_0, X_1 \in \mathbb{R}^n$.

Soit $v(t)$ bornée sur $[t_0, t_1]$ défini par $v(t) = B^T e^{A(t_1-\tau)} W_c(t_0, t_1)^{-1} (x_1 - e^{A(t_1-t_0)} x_0)$,
 $v(t)$ solution de $\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bv, \bar{x}(t_0) = X_0$

On a

$$\begin{aligned} \bar{x}(t_1) &= e^{A(t_1-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B v(\tau) d\tau \\ &= e^{A(t_1-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B B^T e^{A^T(t_1-\tau)} W_c(t_0, t_1)^{-1} (x_1 - e^{A(t_1-t_0)} x_0) d\tau + W_c(t_0, t_1) W_c(t_0, t_1)^{-1} (x_1 - e^{A(t_1-t_0)} x_0) \\ &= x_1 \end{aligned}$$

b) (Σ) commandable \implies W_c inversible. Montrons que si W_c non inversible, alors (Σ) non commandable.

$\exists y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $W_c y = 0$

$$\Leftrightarrow y^T W_c y = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{t_0}^{t_1} y^T e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} y d\tau = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{t_0}^{t_1} \left| B^T e^{(t_1-\tau)A^T} y \right|^2 d\tau = 0 \Rightarrow B^T e^{A^T \tau} y = 0 \forall \tau \in [t_0, t_1]$$

$$\Leftrightarrow y^T e^{A\tau} B = 0$$

Soit u tel que $\dot{x} = Ax + Bu, x(t_0) = 0$

$$x(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow y^T x(t_1) = 0$$

Or si $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ il existe $x_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que $y^T x_1 \neq 0$ par exemple $x_1 = y$ donc $\forall u, x(t_1) \neq x_1$ (Σ) non commandable. ■

Proposition (Gramien asymptotique)

$$W_c(0, \infty) \text{ solution de l'équation de Lyapunov } AP + PA^T + BB^T = 0$$

Remarque Soit $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ et $t \in \mathbb{R}$ on montre avec le théorème de Cayley-Hamilton que :

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j(t) A^j \text{ avec } \phi_j(t) \text{ fonction analytique de } \mathbb{R}, \text{ ie DSE.}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A} B u(\tau) d\tau \\ &= e^{tA} x_0 + \int_0^t \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j(t-\tau) A^j B u(\tau) d\tau \\ &= e^{tA} x_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^t \phi_j(t-\tau) A^j B u(\tau) d\tau \\ &= e^{tA} x_0 + \sum_{j=0}^{n-1} A^j B \underbrace{\int_0^t \phi_j(t-\tau) u(\tau) d\tau}_{\mu_j} \\ &= e^{tA} x_0 + \mathcal{C}(A, B) \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \vdots \\ \mu_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exercice Soit $A \in \mathbb{K}^{3 \times 3}$ diagonalisable. Calculer e^{tA} et en déduire ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 tel que

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^2 \phi_j A^j$$

3.2 Observabilité

Définition

Le système (Σ_d) est observable si $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ à $t = t_0$, il est possible de déterminer le vecteur d'état $(x(t))$ ou x_d , uniquement en se servant de l'entrée $u(t)$ ou u_k et de la sortie $y(t)$ ou y_k .

Définition

On appelle matrice d'observabilité (dite de Kalman), la matrice

$$\mathcal{O}(A, C) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

Théorème (Critère d'Observabilité de Kallman)

Le systèmes (Σ) ou (Σ_d) est observable si et seulement si

$$\text{rang}(\mathcal{O}(A, C)) = n \quad \text{ou} \quad \text{rang}(\mathcal{O}(A_d, C_d)) = n$$

Proposition (Corollaire dans le cas SISO)

$$\text{rang}(\mathcal{O}(A, C)) = n \Leftrightarrow \det(\mathcal{O}(A, C)) \neq 0$$

Démonstration : Dans le cas discret,

$$y_k = C_d A_d^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} C_d A_d^{k-1-j} B_d u_j + D_d u_k$$

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix} x_d = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} - M \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{k-1} \end{bmatrix}$$

avec

$$M = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ CB & \ddots & & & \\ CAB & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ CA^{k-2} & \dots & CAB & CB & 0 \end{bmatrix}$$

$$k \geq n - 1$$

x_d s'obtient si et seulement si $\text{rang}(\mathcal{O}(C, A)) = n$ ■

Proposition

Les propriétés de commandabilité et d'observabilité sont invariantes par changement de variable.

Démonstration : Soit $(\Sigma) = \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$ et $T \in \mathbb{K}^{n \times n}$ inversible et z tel que $x(t) = Tz(t)$.

Alors :

$$\begin{cases} \dot{z} = \underbrace{T^{-1}AT}_{\tilde{A}} + \underbrace{T^{-1}B}_{\tilde{B}} u \\ y = \underbrace{CT}_{\tilde{C}} z + Du \end{cases}$$

Alors on a la matrice de commandabilité :

$$\mathcal{C}(\tilde{A}, \tilde{B}) = [T^{-1}BT^{-1}ATT^{-1}B \dots] = T^{-1}\mathcal{C}(A, B) \implies \text{rg}(\mathcal{C}(\tilde{A}, \tilde{B})) = \text{rg}(\mathcal{C}(A, B))$$

De même :

$$\mathcal{O}(\tilde{C}, \tilde{A}) = \mathcal{O}(C, A)T \implies \text{rg}(\mathcal{O}(\tilde{C}, \tilde{A})) = \text{rg}(\mathcal{O}(C, A)) \quad \blacksquare$$

4 Relation modèle d'état / fonction de transfert

4.1 Modèle d'état vers fonction de transfert

$$u(t) \rightarrow \boxed{(S)} \rightarrow y(t)$$

$$(S) : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Soient $Y(p) = L\{y(t)\}$, $U(p) = L\{u(t)\}$, $p \in \mathbb{C}$. $X(p) = L\{x(t)\} = [X_1(p) \dots X_n(p)]^T$

Alors on a

$$\begin{aligned} L\{\dot{x}\} &= pX(p) - x_0 \\ pX(p) - x_0 &= AX(p) + BU(p) \\ (p1_n - A)X(p) &= BU(p) + x_0 \\ X(p) &= (p1_n - A)^{-1}BU(p) + (p1_n - A)^{-1}x_0 \end{aligned}$$

Remarque : $X(p) = L\{\int_0^t e^{-A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\} + L\{e^{At}x_0\}$

$$\begin{aligned} Y(p) &= CX(p) + DU(p) \\ Y(p) &= [C(p1_n - A)^{-1}B + D]U(p) + C(p1_n - A)^{-1}x_0 + DU(p) \end{aligned}$$

Soit $G(p)$ la fonction de transfert entre u et y .

$$\boxed{G(p) = C(p1_n - A)^{-1}B + D}$$

Proposition

Les valeurs propres de A (les modes de (S)) sont les pôles de la fonction de transfert $G(p)$.

Démonstration :

$$(p1_n - A)^{-1} = \frac{1}{\det(p1_n - A)} \text{Adj}(p1_n - A)$$

Or, $P_A(p) = \det(p1_n - A)$. $\text{Adj}(p1_n - A) \in \mathbb{K}^{n \times n}[X]$ Les éléments de $\text{Adj}(p1_n - A)$ sont des polynômes d'ordre $n - 1$

$$G(p) = \frac{C \text{Adj}(p1_n - A) B + D P_A(p)}{P_A(p)}$$

■

Remarque Les fonctions de transferts entrées/sorties sont indépendantes du choix du vecteur d'état.

4.2 Fonction de transfert / équation différentielle vers modèle d'état

Voir polycopié

Formes canoniques à matrice d'évolution compagnon

Exemple : $4y^{(3)}(t) - 2y^{(1)}(t) + 8y(t) = 2u^{(1)}(t) - u(t)$

On se ramène à une forme conforme au cours (coefficient de plus haut degré égal à 1) :

$$y^{(3)}(t) - \frac{1}{2}y^{(1)}(t) + 2y(t) = \frac{1}{2}u^{(1)}(t) - \frac{1}{4}u(t)$$

Forme compagnon horizontal de type I :

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_c = [-1/4 \quad 1/2 \quad 0], \quad D = 0$$

Forme compagnon horizontal de type II :

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_c = [0 \quad 1/2 \quad -1/4], \quad D = 0$$

Forme compagnon vertical de type I :

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_o = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_c = [1 \quad 0 \quad 0], \quad D = 0$$

Forme modale (pôles simples)

$$\begin{aligned}
G(p) &= \frac{p^2 - 1}{(p+1)(p+2)(p+3)} \\
&= \frac{\alpha_1}{p^2 - 1} + \frac{\alpha_2}{p+2} + \frac{\alpha_3}{p+3} \\
(S) \quad \begin{cases} \dot{x}_m &= \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & -3 \end{bmatrix} x_m + \begin{bmatrix} \alpha_1 \gamma_1 \\ \alpha_2 \gamma_2 \\ \alpha_3 \gamma_3 \end{bmatrix} u \\ y &= [1/\gamma_1 \quad 1/\gamma_2 \quad 1/\gamma_3] x_m + 0, \quad \forall \gamma_i \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

4.3 Changement de base vers une forme canonique

Voir polycopié

4.4 Dualité observation-commande

$$(S) : \begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y &= Cx + Du \end{cases}$$

$$G(s) = C(s1_n - A)^{-1}B + D \in \mathbb{R}[X]$$

$G(s)$ est scalaire, donc en transposant ($G(s) = G(s)^T, D = D^T$) :

$$G(s) = B^T(s1_n - A)^{-1}C^T + D \in \mathbb{R}[X]$$

Ainsi, $\exists \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$(S) : \begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= A^T \tilde{x} + C^T u \\ y &= B^T \tilde{x} + Du \end{cases}$$

C'est la forme duale du modèle d'état (monovariante uniquement).

4.5 Commandabilité et observabilité pour les formes canoniques

Une forme canonique :

- de commandabilité est toujours commandable, l'observabilité est à étudier
- d'observabilité est toujours observable, la commandabilité est à étudier

Cas des formes modales :

$$(S) : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} u \\ y = [\gamma_1 \dots \gamma_n] \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} + D_n \end{cases}$$

(S) est commandable (resp. observable) si et seulement si tous les modes sont commandables (resp. observables)

Si dans la matrice d'application exprimée dans la base modale, un des coefficients est nul, alors le mode correspondant, donc le système, n'est pas commandable. Il en est de même pour la matrice d'observation et l'observabilité.

Cas des formes de Jordan : (exemple)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} u, \quad u \in \mathbb{R}$$

Ce n'est pas un système commandable.

Dans un système monovarié ($y \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}$), si un mode multiple est associé à au moins 2 blocs de Jordan, alors ce mode n'est pas commandable / observable.

5 Commande par retour d'état

$$(S) : \begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu, & x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y &= Cx + Du \end{cases}$$

Étant donné un système en boucle ouverte où A peut posséder des modes / pôles instables, faiblement amortis, lents,... le but est de se donner un ensemble $\{\lambda_1^{des}, \dots, \lambda_n^{des}\} \in \mathbb{C}^n$ auto-conjugué, et de chercher une loi de commande $u(t)$ permettant d'obtenir en boucle fermée un système dont les pôles / modes sont $\{\lambda_1^{des}, \dots, \lambda_n^{des}\}$.

Hypothèses : $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n.$

On suppose que les $x_k(t)$ sont mesurables, i.e. $x(t)$ est mesurable.

Définition

Une loi de commande par retour d'état est une expression du type

$$u(t) = \kappa(x(t)) \text{ où } \kappa : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ x(t) \mapsto u(t) = \kappa(x(t)) \end{array}$$

Dans le cas d'une loi de commande linéaire, la ldc par retour d'état est une expression du type :

$$u(t) = Kx(t) \text{ où } K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

K est alors appelé gain du retour d'état.

Une ldc linéaire par retour d'état et consigne est une expression du type :

$$u(t) = Kx(t) + \eta e(t)$$

où $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ gain du retour d'état, $\eta \in \mathbb{R}$ terme de précommande et $e(t)$ signal de consigne (ou de référence).

5.1 Mise en équation (cas continu) :

$$(\Sigma) : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Avec $u = Kx + \eta e$,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + BKx + \eta Be \\ &= (A + BK)x + \eta Be \end{aligned}$$

Posons $A_{bf} = A + BK \in \mathbb{K}^{n \times n}$ matrice d'évolution en bf, $B_{bf} = \eta B \in \mathbb{K}^{n \times 1}$ matrice d'application du signal de consigne

$$\dot{x} = A_{bf}x + B_{bf}e$$

Donc :

$$x(t) = e^{tA_{bf}}x_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A_{bf}} B_{bf}e(\tau) d\tau$$

Remarque le Dynamisme de $x(t)$ est caractérisé par les valeurs propres de A_{bf} . K permet de les régler sous certaines conditions.

5.2 Calcul du gain K du retour d'état

On souhaite trouver $K \in \mathbb{K}^{1 \times n}$ tel que $\{\lambda_1^d, \dots, \lambda_n^d\}$ correspondent aux valeurs propres de $A_{bf} = A + BK$.

Hypothèse : (Σ) est commandable, i.e. $\mathcal{C}(A, B)$ est inversible.

Soit $P_A(\lambda) = \det(\lambda 1_n - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$.

Soit $\Pi_d(p)$ le polynôme caractéristique désiré en boucle fermée.

$$\begin{aligned} \Pi_d(\lambda) &= \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i^d) \\ &= \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0, \alpha_k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ainsi, on cherche $K = [k_0, k_1, \dots, k_n]$ tel que

$$\begin{aligned} P_{A_{bf}}(\lambda) &= \det(\lambda 1_n - A_{bf}) \\ &= \det(\lambda 1_n - A - BK) \\ &= \Pi_d(\lambda) \end{aligned}$$

Cette équation polynomiale équivaut à un système linéaire de n équations à n inconnues k_0, k_1, \dots, k_n .

On identifie terme à terme les monômes de $\Pi_d(\lambda)$ et $P_{A_{bf}}(\lambda)$ pour obtenir les n équations.

5.2.1 Obtention de K à partir de la forme canonique de commandabilité

Soit $M \in \mathbb{K}^{n \times n}$ la matrice de changement de coordonnées vers la forme canonique de commandabilité tel que :

$$(S) : \begin{cases} \dot{x}_c &= A_c x + B_c u \\ y &= C_c x + D_c u \end{cases}$$

où

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_0 & \dots & & -a_{n-1} \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x = Mx_c$$

$$u(t) = Kx(t) + \eta e(t)$$

$$u(t) = KMx_c(t) + \eta e(t)$$

Posons $\tilde{K} = KM = [\tilde{k}_1 \dots \tilde{k}_{n-1}]$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c \tilde{K} x + \eta B_c e \\ &= \tilde{A}_{bf} x + \eta B e \\ \tilde{A}_{bf} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_0 & \dots & & -a_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [\tilde{k}_0 \dots \tilde{k}_{n-1}] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_0 + \tilde{k}_0 & \dots & & -a_{n-1} + \tilde{k}_{n-1} \end{bmatrix} \\ P_{\tilde{A}_{bf}}(\lambda) &= \det(\lambda 1_n - \tilde{A}_{bf}) \\ &= \lambda^n + (a_{n-1} - \tilde{k}_{n-1})\lambda^{n-1} + \dots + (a_0 - \tilde{k}_0) \end{aligned}$$

Rappel : si $P_A(\lambda) = \det(\lambda 1_n - A)$, $P_{T^{-1}AT} = \det(T^{-1})P_A(\lambda)\det(T)$.
En identifiant terme à terme $P_{\tilde{A}_{bf}}(\lambda)$ avec $\Pi_d(\lambda)$, on obtient

$$\begin{aligned} a_{n-1} - \tilde{k}_{n-1} &= \alpha_{n-1} \\ &\vdots \\ a_1 - \tilde{k}_1 &= \alpha_1 \\ a_0 - \tilde{k}_0 &= \alpha_0 \end{aligned}$$

d'où $\tilde{k}_j = a_j - \alpha_j, j = 0 \dots n-1$ et enfin, $K = \tilde{K}M^{-1}$

5.2.2 formule d'Ackerman

Théorème (Formule d'Ackerman)

$$K = [0 \dots 0, 1] \cdot \mathcal{C}(A, B)^{-1} \Pi_d(A)$$

Démonstration : Preuve par récurrence, la preuve en dimension 3 est « laissé en exercice au lecteur ». ■

Remarque : il n'y a pas besoin de calculer l'inverse de $\mathcal{C}(A, B)$ dans son intégralité, mais seulement la dernière ligne, c'est-à-dire seulement la dernière colonne de la matrice des cofacteurs.

5.3 Calcul du terme de précommande η

$$(S) : \begin{cases} \dot{x}_c &= (A + BK)x + B\eta u \\ y &= (C + DK)x + B\eta u \end{cases}$$

Soit $G_{bf}(p) = ((C + DK)(p1_n - A - BK)^{-1}B + D)\eta$

Erreur statique nulle $\Leftrightarrow G_{bf}(0) = 1$ (gain statique unitaire en bf)

$$\eta = \frac{-1}{(C + DK)(A + BK)^{-1}B - D}$$

Remarque : en cas de boucle mal posée (quand le dénominateur est nul), on peut mettre en série du système de départ un filtre passe-bas.

5.4 Poursuite de trajectoire

$$(S) : \begin{cases} \dot{x}_c &= A_c x + B_c u \\ y &= C_c x + D_c u \end{cases}$$

$\exists M \in \mathbb{K}^{n \times n}$ inversible tel que

$$M^{-1}AM = A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_0 & \dots & & a_{n-1} \end{bmatrix} \quad M^{-1}B = B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_c = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}, \quad x = Mx_c$$

5.4.1 Forme canonique de commandabilité

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_0 & \dots & & a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Posons $a = [-a_0 \dots a_{n-1}]$, puis $v(t) = -a^T x_c(t) + u(t)$, on obtient la forme de Brunovsky :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ v \end{bmatrix}$$

On parle aussi d'une chaîne d'intégrateurs en cascade.

5.4.2 Application au suivi de trajectoire

Soit $y_d(t)$ une trajectoire désirée en boucle fermée.

Si $y(t) = z_1(t)$ (par exemple), $\dots, y^{(n)}(t) = z_1^{(n)}(t) = v$,

soit $\epsilon(t) = y(t) - y_d(t) = z_1(t) - y_d(t), \dots, \epsilon^{(n)}(t) = v(t) - y_d^{(n)}(t)$

On pose

$$v(t) = y_d^{(n)}(t) + k_{n-1}(y^{(n-1)}(t) - y_d^{(n-1)}(t)) + \dots + k_1(y^{(1)}(t) - y_d^{(1)}(t)) + k_0(y - y_d)$$

où les racines du polynôme caractéristique $p^n + k_{n-1}p^{n-1} + k_1p + k_0$ sont à partie réelle strictement négative, alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_d(t)$$

Enfin,

$$u(t) = v(t) + a^T x_c$$

6 Observateur

CF polycopié

6.1 Concept

$$(S) : \begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu, & x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y &= Cx + Du \end{cases}$$

Seul y est mesuré à chaque instant par un capteur.

L'observateur donne une estimation du vecteur d'état du système telle que :
 $\forall \epsilon > 0$, arbitrairement petit, $\exists T > 0$ tel que

$$\forall t > T, \|x(t) - \hat{x}(t)\| < \epsilon$$

But : faire la synthèse du système (O) sous forme d'état, appelé observateur du système (S).

6.2 Observateur asymptotique (extension de l'observateur de Luenberger)

Hypothèse : système (S) observable

Définition

Un observateur asymptotique d'ordre n est donné par le modèle d'état

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$$

où $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état quelconque de l'observateur et $L \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ est le gain de l'observateur asymptotique. $L(y - \hat{y})$ correspond à un terme de correction, et $\epsilon_y = y - \hat{y}$ est appelé innovation.

But : calculer $L \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ tel que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \hat{x}(t)\| = 0$

Soit $\epsilon_x(t) = x(t) - \hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\dot{\epsilon}_x(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = Ax(t) + Bu(t) - (A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)))$$

Or, $y(t) = Cx(t) + Du(t)$ et $\hat{y} = C\hat{x}(t) + Du(t)$, donc $y - \hat{y} = C\epsilon_x$

$$\dot{\epsilon}_x(t) = (A - LC)\epsilon_x(t)$$

$\epsilon_x(0) = x(0) - \hat{x}(0) = x_0 - \hat{x}_0$ avec x_0 inconnu et \hat{x}_0 choisi arbitrairement par l'utilisateur.

$$\epsilon_x(t) = e^{(A-LC)t}(x_0 - \hat{x}_0)$$

$A - LC$: dynamique d'observation.

Si les valeurs propres de $A - LC$ sont à partie réelle strictement négative, alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon_x(t) = 0 \quad \text{i.e.} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t) = x(t)$$

Ainsi, on se donne un polynôme caractéristique désiré pour la dynamique d'observation

$$\Pi_o(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i^o)$$

avec $\{\lambda_j\}_{j=1..n}$ auto-conjugué (stable par conjugaison) et $\forall j, \text{Re}(\lambda_j) < 0$

$$\Pi_o(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \lambda^i, \quad \gamma_k \in \mathbb{R}$$

Soit $L = [l_1 \ \dots \ l_{n-1}]^T$, le calcul de L s'appuie sur la résolution du système linéaire (de type $ML = b$) issu de l'identification terme à terme des monômes de $P_{A-LC}(\lambda) = \det(\lambda 1_n - (A - LC))$ avec ceux de $\Pi_o(\lambda)$.

Soit $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible tel que $x(t) = Tx_0(t)$ conduit à la forme canonique d'observabilité, c'est-à-dire avec

$$\begin{cases} \dot{x}_0 &= \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_0 & \dots & & 0 \end{bmatrix} x_0 + \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} u \\ y(t) &= [1 \ 0 \dots 0]x + Du \end{cases}$$

Or, $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y})$ et $\hat{y} = C\hat{x}$.

Posons \hat{x}_0 tel quel $\hat{x} = T\hat{x}_0$

$$\begin{cases} T\dot{\hat{x}}_0 &= AT\hat{x}_0 + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= CT\hat{x} + Du \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}}_0 &= A_0\hat{x}_0 + B_0u + T^{-1}L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C_0\hat{x} + D_u \end{cases}$$

où $A_0 = T^{-1}AT, B_0 = T^{-1}B, C_0 = CT$

Posons $\tilde{L} = T^{-1}L = [\tilde{l}_{n-1} \dots \tilde{l}_0]^T$

$$\dot{\tilde{\epsilon}}_x = (A - \tilde{L}C_0)\epsilon_x$$

$$\text{Calculons } A_0 - \tilde{L}C_0 = \begin{bmatrix} -a_{n-1} - \tilde{l}_{n-1} & 1 & & \\ \vdots & & 0 & \ddots \\ \vdots & & & 1 \\ -a_0 - \tilde{l}_0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est $P_{A_0 - \tilde{L}C_0}(\lambda) = \lambda^n + (a_{n-1} - \tilde{l}_{n-1})\lambda^{n-1} + \dots + (a_0 - \tilde{l}_0)$ (dédit de la forme de la matrice compagnon).

En identifiant terme à terme les monômes de $\Pi_d(\lambda)$ avec $P_{A-LC}(\lambda) : \tilde{l}_j = \gamma_j - a_j$ d'où on en déduit $L = T\tilde{L}$.

6.3 Correcteur par retour de sortie - Correcteur par retour d'état sur l'état reconstruit

$$(S) : \begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu, & x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y &= Cx + Du \end{cases}$$

Loi de commande par retour d'état et consigne :

$$u(t) = Kx(t) + \eta e(t)$$

où x était supposé entièrement mesurable.

En pratique on utilisera

$$(C) \begin{cases} \dot{\hat{x}} &= Ax + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C\hat{x} + Du \end{cases}$$

$$u(t) = K\hat{x}(t) + \eta e(t)$$

Correcteur dynamique par retour de sortie avec la structure observateur - retour d'état sur l'état reconstruit.

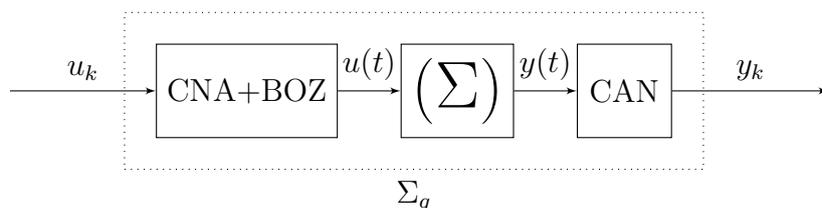
$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + BK\hat{x} + \eta Be + LC(x - \hat{x}) \\ &= (A + BK - LC)\hat{x} + LCx + \eta BE \\ &= (A + BK - LC)\hat{x} + L(y - DK\hat{x} - \eta De) + \eta Be \\ &= (A + BK - LC - LDK)\hat{x} + (B - LD)\eta e + Ly \\ &= K_A\hat{x} + K_{Be}e + Ly \\ u &= K\hat{x} + \eta e + 0y \end{aligned}$$

Proposition (Principe de séparation)

La dynamique du système (Σ) bouclé au correcteur est donné par l'union de :

- la dynamique de commande (valeurs propres de $A + BK$)
- la dynamique d'observation (valeurs propres de $A - LC$)

7 Modèle d'état d'un système analogique discrétisé par un CNA-BOZ



Hypothèses : Pas d'erreur de quantification. Conversions synchrones périodique de période T_e

Pour (Σ) on a :

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau$$

Pour $t = kT_e$

$$x_k = e^{kT_e A}x_0 + \int_0^{kT_e} e^{(kT_e-\tau)A}Bu(\tau)d\tau$$

Alors

$$x_{k+1} = e^{T_e A} \left(e^{kT_e A}x_0 + \int_0^{kT_e} e^{(kT_e-\tau)A}Bu(\tau)d\tau + \int_{kT_e}^{(k+1)T_e} e^{(kT_e-\tau)A}Bu(\tau)d\tau \right)$$

$$x_{k+1} = e^{T_e A} \left(x_k - \int_0^{-T_e} e^{\sigma A}Bu_k d\sigma \right)$$

$$x_{k+1} = \underbrace{e^{T_e A}}_{A_d} x_k + \underbrace{\int_0^{T_e} e^{\sigma A}Bd\sigma}_{B_d} u_k$$

De plus

$$y_k = y(kT_e) = Cx(kT_e) + Du(kT_e) = Cx_k + Du_k$$