# TD6 : Représentation d'état et commandabilité

## Exercice 1 :

Remarque : Avec ces notations on a : $i_q = -C\frac{dv}{dt}$
Lois des noeuds :

- $i = i_1 + i_2$
- $i = i_3 + i_4$
- $i_1 = i_q + i_3$
- $i_4 = i_q + i_2$

Lois des mailles :

- $R_1 i_1 - R_2 i_2 - v = 0$
- $R_3 i_3 + v - R_4 i_4 = 0$

$$R_1 i_q + R_1 i_3 - R_2 i_2 - v = 0 \tag{1}$$
$$R_3 i_3 + v - R_4 i_2 - R_4 i_q = 0 \tag{2}$$

ou encore :

$$-R_1 C\frac{dv}{dt} - v + R_1 i_3 - R_2 i_2 = 0 \tag{3}$$
$$R_4 C\frac{dv}{dt} + vR_3 i_3 - R_4 i_2 = 0 \tag{4}$$

Posons $\Delta = R_1R_4 - R_2R_3$ On a donc :

$$i_3 = \frac{1}{\Delta}(-(r_1 + r_2)R_4C\dot{v} - (R_2 + R_4)v) \tag{5}$$
$$i_2 = \frac{1}{\Delta}(-(R_3 + R_4)R_1C\dot{v} - (R_1 + R_3)v) \tag{6}$$

on a donc :

$$u = L\frac{di}{dt} + R_1 i_1 + R_3 i_3 \tag{7}$$
$$= L\frac{di}{dt} - (R_1 + R_3)i_3 + R_1 i_q \tag{8}$$
$$\vdots \tag{9}$$
$$u = L\frac{di}{dt} - \frac{(R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4)C}{\Delta}\dot{v} - \frac{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}{\Delta}v \tag{10}$$

Or, $i = i_1 + i_2$ donc $i = i_q + i_3 + i_2$, donc :

$$i = -C\dot{v} - \frac{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}{\Delta}v - \frac{(R_1R_3 + 2R_1R_4 + R_2R_4)C}{\delta}\dot{v} \tag{11}$$
$$\vdots \tag{12}$$
$$i = -\frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{\Delta}\dot{v} - \frac{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}{\Delta}v \tag{13}$$

On pose :

- $\alpha_1 = R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4$
- $\alpha_2 = (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)$
- $\beta_1 = (R_1 + R_3)(R_2 + R_4)$
- $\beta_2 = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$

On a alors :

$$u = L\frac{di}{dt} - \frac{\alpha_1 C}{\Delta}\dot{v} - \frac{\beta_1}{\Delta}v \tag{14}$$

$$i = -\frac{\alpha_2 C}{\Delta}\dot{v} - \frac{\beta_2}{\Delta}v \tag{15}$$

Posons $x_1 = i$ et $x_2 = v$ :

$$u = L\dot{x_1} - \frac{\alpha_1 C}{\Delta}\dot{x_2} - \frac{\beta_1}{\Delta}x_2 \tag{16}$$

$$x_1 = -\frac{\alpha_2 C}{\Delta}\dot{x_2} - \frac{\beta_2}{\Delta}x_2 \tag{17}$$

On a donc le système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} L & -\frac{\alpha_1 L}{\Delta} \\ 0 & -\frac{\alpha_2 L}{\Delta} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta_1}{\Delta} \\ 1 & \frac{\beta_2}{\Delta} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \tag{18}$$

On en déduit alors pour $\frac{\alpha_2 CL}{\Delta} \neq 0$ l'équation d'état :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_1}{\alpha_2 L} & \frac{\beta_1}{\Delta} - \frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2 L\Delta} \\ -\frac{\Delta}{\alpha_2 C} & -\frac{\beta_2}{\alpha_2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} u \tag{19}$$

Sans oublier l'équation d'obeservation :

$$y = i = x_1 = (\,1 \;\; 0\,) . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 0 * u \tag{20}$$

2- Théorème de caractérisation de la commandabilité :
On considère le système suivant :

$$(S) = \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

(S) est commandable ⇔ rang[C(A,B)] = n (matrice de rang plein)
Où C(A,B) = ( $A^0B \;\; AB \;\; A^2B \;\; ... \;\; A^{n-1}B$ ) $\in \mathbb{R}^{n*n}$

Remarque : on est en monovariable ⇔ $det(C(A,B)) \neq 0$

On calcul donc :

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_1}{\alpha_2 L} & \frac{\beta_1}{\Delta} - \frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2 L\Delta} \\ -\frac{\Delta}{\alpha_2 C} & -\frac{\beta_2}{\alpha_2} \end{pmatrix}$$

$$A^0B = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_1}{\alpha_2 L^2} \\ -\frac{\Delta}{\alpha_2 LC} \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$C(A,B) = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{\alpha_1}{\alpha_2 L^2} \\ 0 & -\frac{\Delta}{\alpha_2 LC} \end{pmatrix}$$

On calcul alors le determinant :

$$det(C(A,B)) = \frac{-\Delta}{\alpha_2 L^2 C} \neq 0 \Leftrightarrow \Delta \neq 0$$
$$\Leftrightarrow R_1R_4 - R_2R_3 \neq 0$$

Remarque : si $R_1R_4 = R_2R_3$ le pont est équilibré et $v(t) = 0$ donc le système est non commandable.

# Exercice 2 :

1-a)

$$\begin{aligned}
P_a(\lambda) = det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -3-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (-1-\lambda)(-3-\lambda)(-2-\lambda) + (-2-\lambda) \\
&= (-2-\lambda)(+3+\lambda+3\lambda+\lambda^2+1) \\
&= (-2-\lambda)^3
\end{aligned}$$

1-b) $\lambda_0 = -2$ vecteur propre triple

1-c) Cherchons les vecteurs propres vérifiant $AX = \lambda X$ :

$$\begin{aligned}
-x_1 + x_2 &= -2x_1 \\
-x1 - 3x_2 &= -2x_2 \rightarrow x_1 + x_2 = 0 \\
x_1 + x_2 - 3x_3 &= -2x_3
\end{aligned}$$

On choisit donc $x_3$ quelconque et $x_1 = -x_2$ ce qui correspond à un sous espace propre de dimension 2 et :

$$Ker\{\lambda_0 \mathbb{1}_3 - A\} = Vect\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

La dimension de ce sous espace propre est $2 \leq 3$ donc A est non diagonalisable.
On a donc deux blocs de Jordan car la multiplicité des valeurs propres de 2 :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \textbf{ ou alors } \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = J$$

Le but maintenant est de trouver un 3ème vecteur pour compléter la bases de vecteurs propres et avoir $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$ tel que $V^{-1}AV = J$, avec J l'une des deux matrices contenant un bloc de Jordan.
En posant AV = VJ on a :

$$\begin{pmatrix} Av_1 & Av_2 & Av_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 v_1 & \lambda_0 v_2 & v_2 + \lambda_0 v_3 \end{pmatrix}$$

et on obtient le système :

$$\begin{matrix} Av_1 & & \lambda_0 v_1 \\ Av_2 & = & \lambda_0 v_2 \\ Av_3 & & v_2 + \lambda_0 v_3 \end{matrix}$$

on obtient donc en particulier pour le vecteur $v_3$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On constate qu'il n'est pas possible de déterminer $v_3$ de cette façon, on cherche donc a prendreà la place de $v_2$, $\tilde{v_2} = \alpha v_1 + \beta v_2$ de sorte à avoir $A\tilde{v_2} = \lambda_0 \tilde{v_2}$ (ce qui reste vrai car on prend une combinaison liéaire de 2 vecteur propre du ker) et surtout $(A - \lambda_0 \mathbb{1}_3)v_3 = \tilde{v_2}$. On a donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} v_3 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec , $\beta = \alpha = 1$

$$\tilde{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on résoud alors pour trouver $v_3$ :

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on a donc finalement trouvé V :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$V^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$J = V^{-1}AV = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

On a bien une matrice diagonale par bloc avec un bloc de Jordan. On pose $\xi \in \mathbb{R}^3$, $x = V\xi$, et on a le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \quad x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y = Cx + Du \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \dot{\xi} = J\xi + V^{-1}Bu & = J\xi + \tilde{B}u \\ y = CV\xi + Du & = \tilde{C}\xi + \tilde{D}u \end{array} \right.$$

avec,

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\tilde{D} = 0$$

2-

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xi$$
$$C(A,B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 8 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$det(C(A,B)) = 0$$

Non commandable.