

UE431 TD 4 : Stabilité des systèmes bouclés

On considère le système ayant la fonction de transfert en boucle ouverte suivante :

$$T(j\omega) = K \frac{1 + \frac{p}{\omega_1}}{\left(1 + \frac{p}{\omega_2}\right)^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \omega_1 = \frac{1}{\alpha RC} & \omega_1 = \frac{\omega_2}{\alpha} \\ \omega_2 = \frac{1}{RC} & \underline{K = -\frac{1}{\alpha\beta} < 0} \end{cases}$$

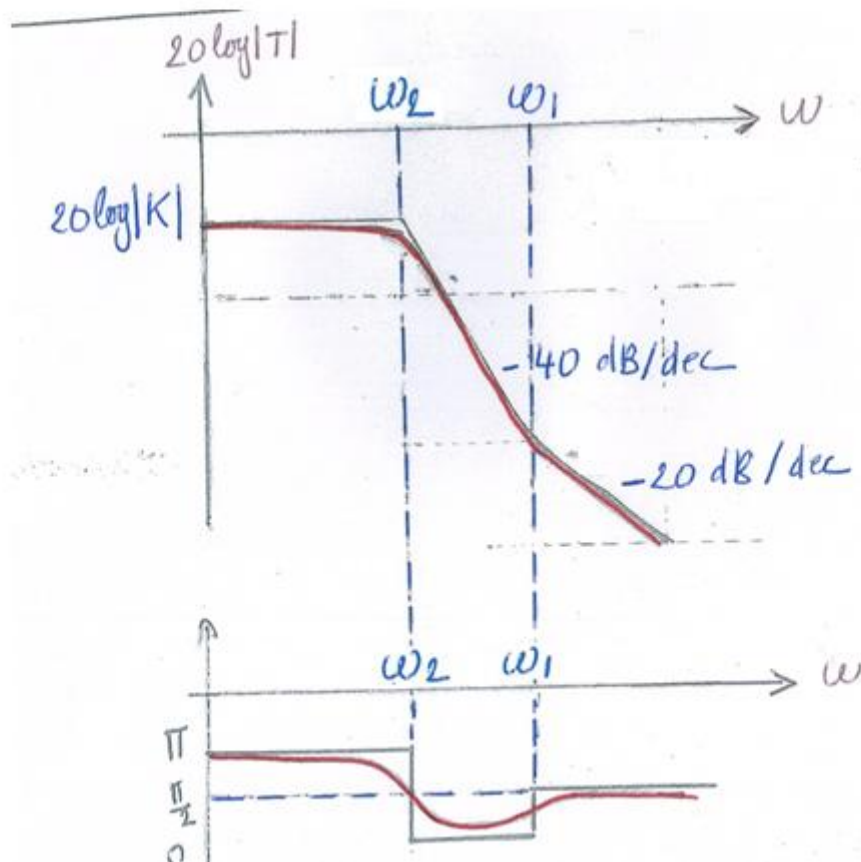
On veut étudier la stabilité de ce système en appliquant le critère de Nyquist (critère géométrique \Leftrightarrow méthode graphique)

$$T(j\omega) = K \frac{1 + \frac{p}{\omega_1}}{\left(1 + \frac{p}{\omega_2}\right)^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \omega_1 = \frac{1}{\alpha RC} & \omega_1 = \frac{\omega_2}{\alpha} \\ \omega_2 = \frac{1}{RC} & K = -\frac{1}{\alpha\beta} < 0 \end{cases}$$

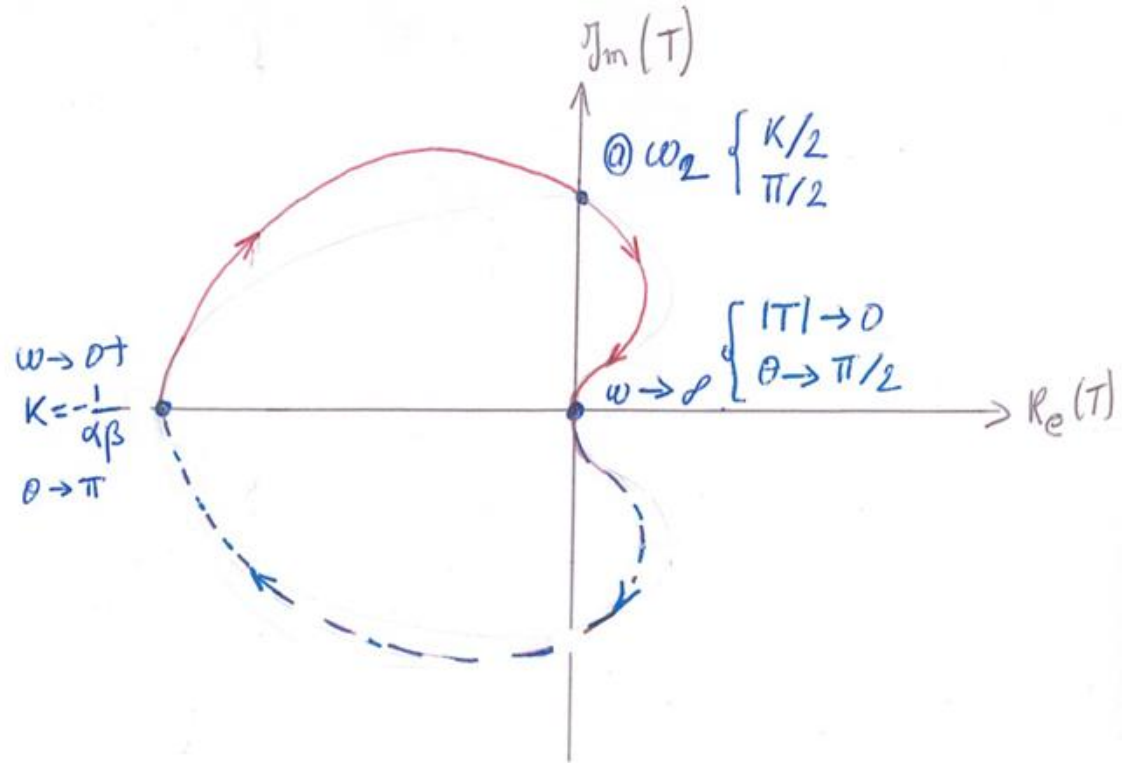
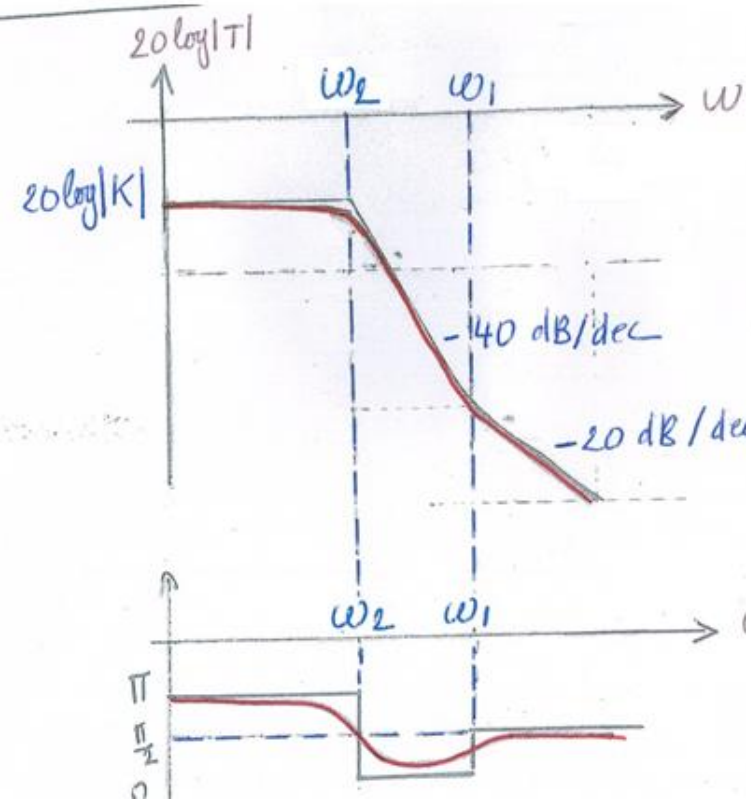
1^{ère} étape : On traite le cas $\alpha < 1 \Rightarrow \omega_1 > \omega_2$

- Tracé du diagramme de Bode :

Illustration dans le cas $\omega_1 = 10\omega_2$ ($\Leftrightarrow \alpha = 1/10$, on a alors effectivement les pentes indiquées sur la courbe)



• Tracé du Nyquist :



- Quand $\omega \rightarrow 0+$ $\arg(T) \rightarrow +\pi$ $|T| \rightarrow K$
- Quand $\omega \rightarrow \omega_2$ $\arg(T) \rightarrow +\pi/2$ $|T| \rightarrow K/2$

• Application du critère de Nyquist :

- Détermination des pôles de $T(p)$ afin de déterminer le nombre P de pôles à partie réelle positive entourés par le contour de Bromwich :

$$\left(1 + \frac{p}{\omega_2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow p = -\omega_2 < 0$$

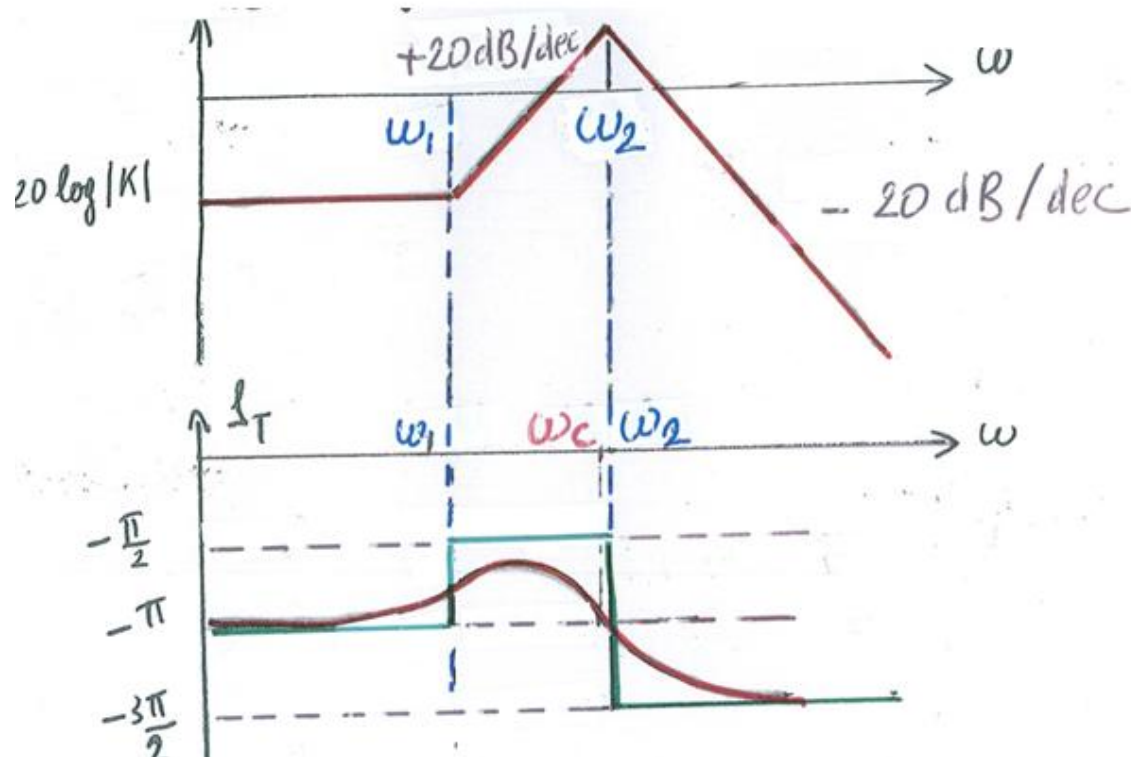
D'où le résultat : **P = 0**

2^{ème} étape : On traite le cas $\alpha > 1 \Rightarrow \omega_1 < \omega_2$

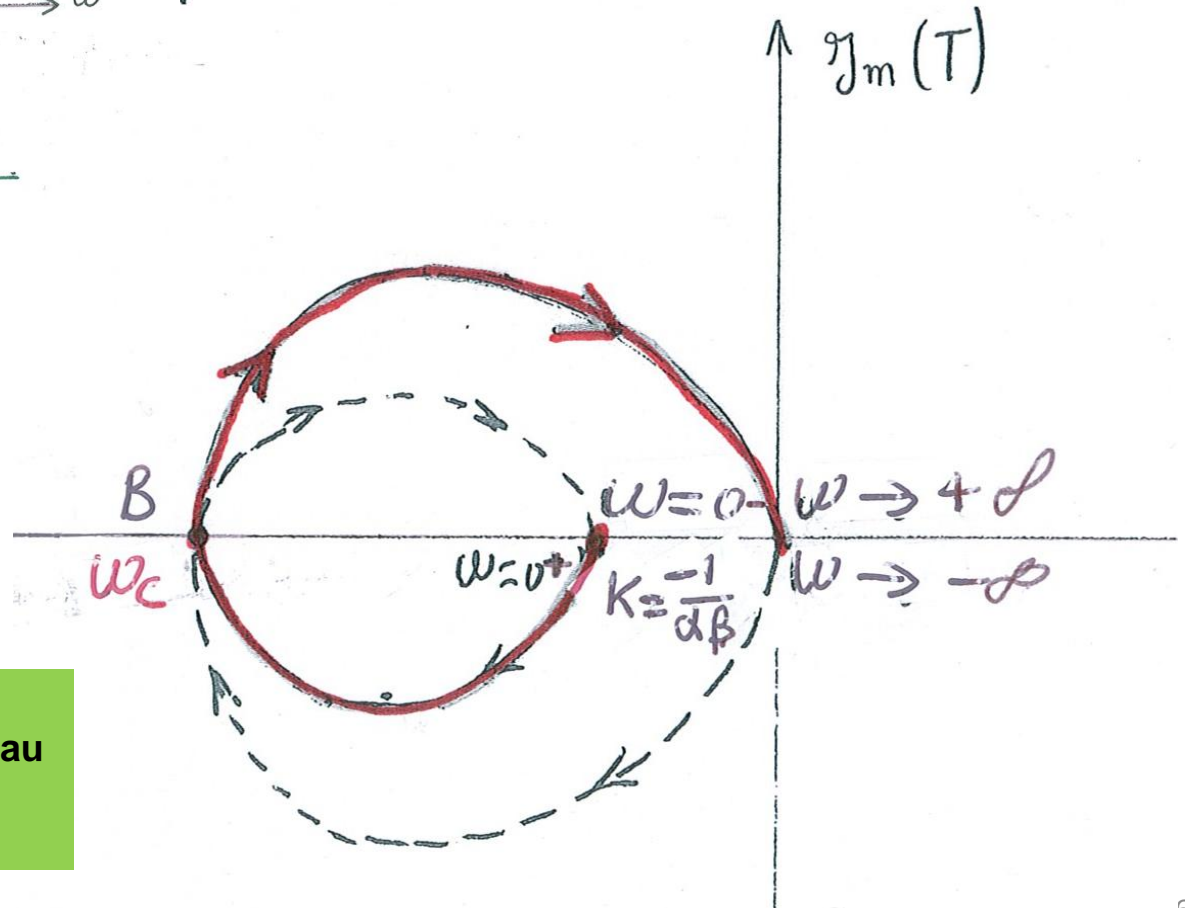
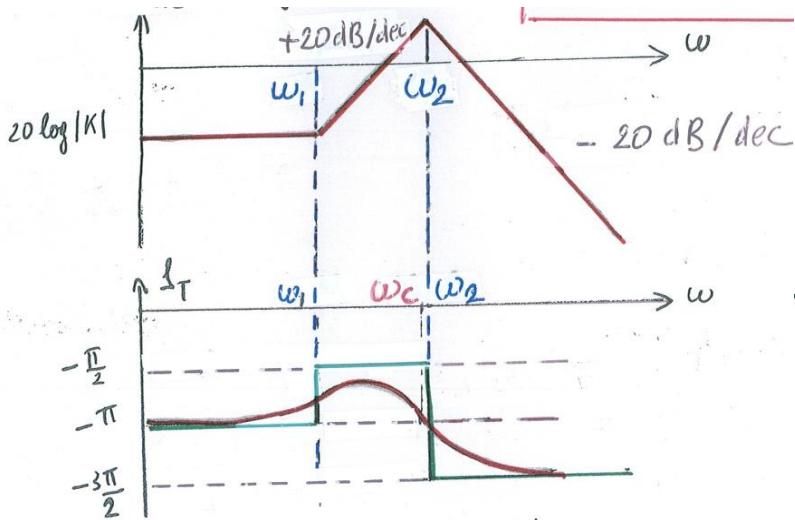
$$T(j\omega) = K \frac{1 + \frac{p}{\omega_1}}{\left(1 + \frac{p}{\omega_2}\right)^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \omega_1 = \frac{1}{\alpha RC} & \omega_1 = \frac{\omega_2}{\alpha} \\ \omega_2 = \frac{1}{RC} & K = -\frac{1}{\alpha\beta} < 0 \end{cases}$$

- Tracé du diagramme de Bode :

Illustration dans le cas $\omega_1 = \omega_2/10$ ($\Leftrightarrow \alpha = 10$, on a alors effectivement les pentes indiquées sur la courbe)



• Tracé du Nyquist :



Dans l'étude de la stabilité, la position du point B par rapport au point $(-1,0)$ devra être prise en compte.

• Application du critère de Nyquist :

On a vu précédemment que $P = 0$.

Pour que le système soit stable il faut $N = 0$ (nombre de tours N du lieu du Nyquist autour du point $(-1,0)$ (comptés positivement dans le sens trigo)). Cela dépendra de la position du pt B par rapport à ce point.

• Détermination des coordonnées du point B :

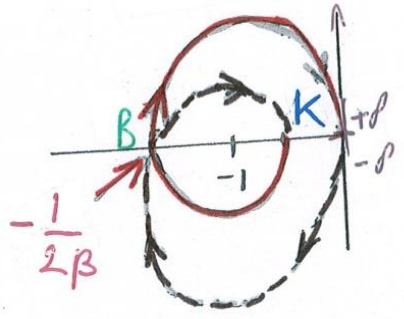
Soit ω_c la pulsation correspondant au point B. On a $\text{Arg}(T(\omega_c)) = -\pi$
Déterminons $|T(\omega_c)|$.

...

Cas $\alpha > 2$

$$\beta < \frac{1}{2}$$

$$\alpha > 2$$



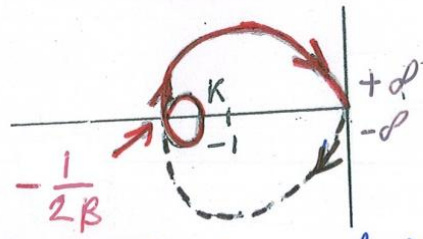
$N = 2 \neq 0$ donc instable

Si $-\frac{1}{2\beta} < -1$ et $K = -\frac{1}{\alpha\beta} < -1$

in cas

$$\beta < \frac{1}{2}$$

$$\alpha > 2$$



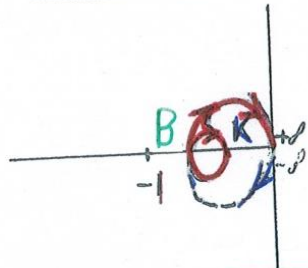
$N = 1 \neq 0$ donc instable

Seul change le rapport α/β dans cet intervalle

Si $-\frac{1}{2\beta} > -1$ et $-1 < K = -\frac{1}{\alpha\beta} < 0$

$$\beta > \frac{1}{2}$$

$$\alpha > 2$$

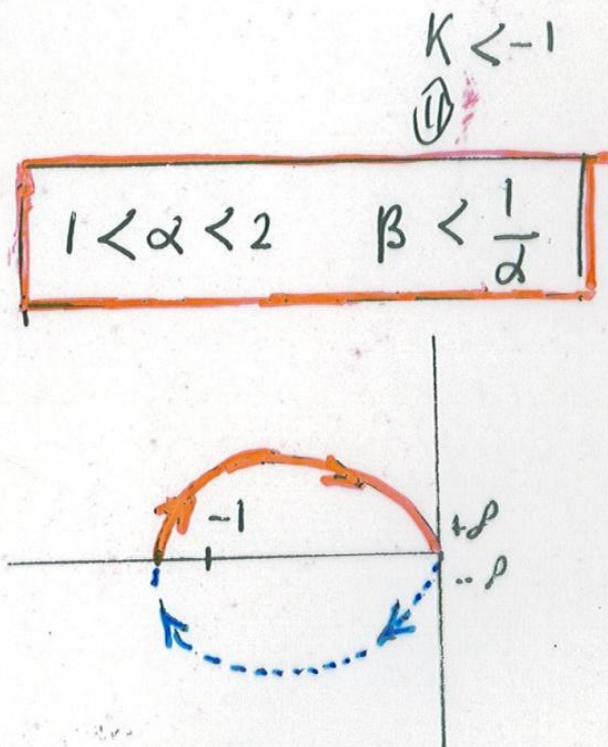


$N = 0 = P$ donc stable

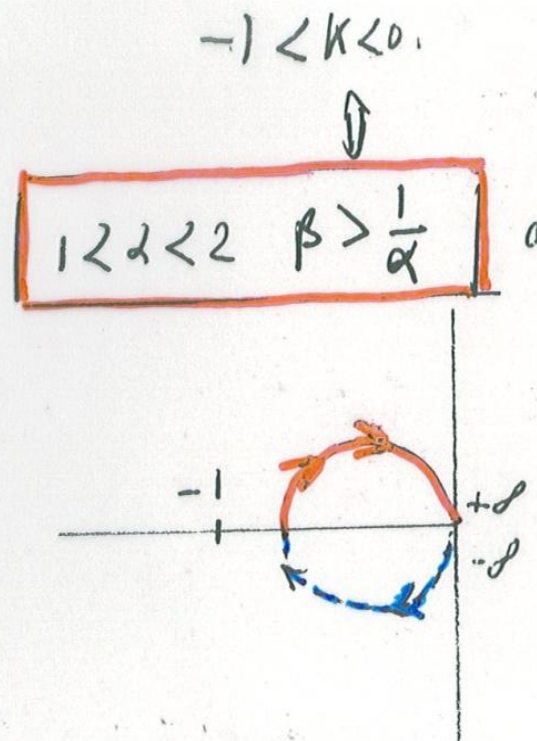
Conclusion intermédiaire :

$$\alpha > 2 \begin{cases} \nearrow \beta < \frac{1}{2} \text{ instable} \\ \searrow \beta > \frac{1}{2} \text{ stable} \end{cases}$$

Cas $1 < \alpha < 2$ (cas où le point B n'existe pas)



$N = 1 \neq P = 0 \Rightarrow$ instable



$N = P = 0$ stable

Remarque : La validité du résultat n'est pas assurée pour $0 < \alpha < 1$ car le diagramme de Bode et donc le lieu du Nyquist ont été tracés en supposant une décade entre ω_1 et ω_2 .

Etude de la stabilité à partir de $H(p)$:

$$H(p) = \frac{-p/RC}{p^2 + \frac{2\beta - 1}{\beta} \frac{p}{RC} + \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha\beta R^2 C^2}} = \frac{-p/RC}{ap^2 + bp + c}$$

Le système est stable si les pôles de $H(p)$ sont à partie réelle négative

$$\begin{aligned} ap^2 + bp + c &= 0 \\ \Leftrightarrow p^2 + \frac{b}{a}p + \frac{c}{a} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow p^2 - Sp + \pi = 0 \text{ avec } S = -b/a \text{ et } \pi = c/a$$

$$P_{1,2} = \frac{S \pm j\sqrt{S^2 - 4\pi}}{2}$$

On démontre que P_1 et P_2 sont à parties réelles < 0 si $S < 0$ et $\pi > 0$.

Donc, dans le cas qui nous concerne le système est stable si :

$$\frac{1 - 2\beta}{\beta} < 0 \Leftrightarrow \beta > 1/2$$
$$\frac{\alpha\beta - 1}{\alpha\beta} > 0 \Leftrightarrow \alpha\beta - 1 > 0$$

Donc le système est stable si : $\beta > \frac{1}{2}$ et $\beta > 1/\alpha$

On retrouve le résultat de l'étude faite à l'aide du critère de Nyquist.

Détermination de α et β tels que l'on ait une oscillation sinusoïdale pure :

$$P_{1,2} = \frac{S \pm j\sqrt{S^2 - 4\pi}}{2}$$

D'après le cours : on aura une oscillation pure si $\Re(P_{1,2}) = 0$

$$\begin{cases} \frac{1 - 2\beta}{\beta RC} = 0 \\ \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha\beta R^2 C^2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{1}{2} \\ \text{et } \alpha > 2 \end{cases}$$

Calcul de la pulsation ω_c correspondant à cette condition :

$$p^2 + \frac{2\beta - 1}{\beta} \frac{p}{RC} + \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha\beta R^2 C^2} = 0 \text{ avec } p = j\omega_c$$

et sachant que $\beta = \frac{1}{2}$ et $\alpha > 2$

on a $p^2 + \frac{\alpha/2 - 1}{\alpha R^2 C^2} = 0$ d'où $-\omega_c^2 = -\frac{\alpha/2 - 1}{\alpha/2 R^2 C^2}$

$$\omega_c = \frac{1}{RC} \sqrt{1 - \frac{2}{\alpha}} \text{ avec } \alpha > 2$$

Exprimons $v_s(t)$ lorsque $\beta = \frac{1}{2}$ et $\alpha > 2$ pour $v_e(t) = k\delta(t)$

$$v_e(t) = k\delta(t) \xrightarrow{\text{yields}} V_e(p) = k$$

d'où

$$V_s(p) = \frac{-p/RC}{p^2 + \frac{2\beta - 1}{\beta} \frac{p}{RC} + \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha\beta R^2 C^2}} \cdot k$$

$$\text{Or, } \beta = \frac{1}{2} \quad \text{et } \omega_c = \frac{1}{RC} \sqrt{1 - \frac{2}{\alpha}}$$

on a donc

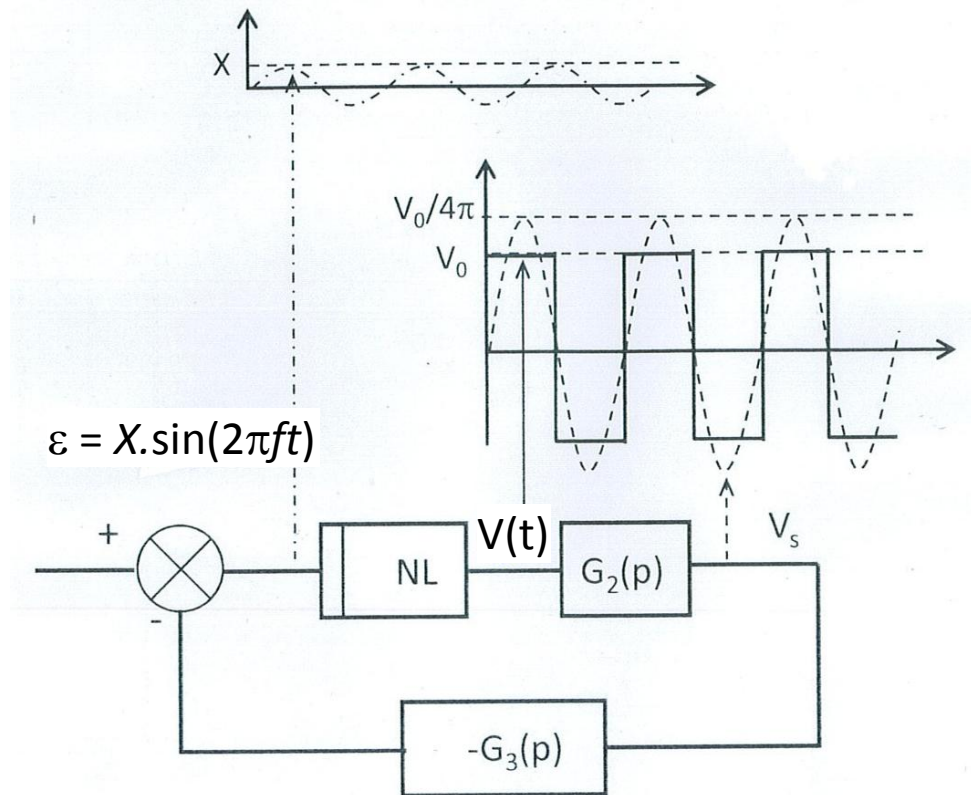
$$V_s(p) = \frac{-k}{RC} \frac{p}{p^2 + \omega_c^2}$$

|

Par transformée de Laplace inverse il vient :

$$v_s(t) = \frac{-k}{RC} \cos \omega_c t$$

IV- 2 Etude de l'oscillateur en régime permanent



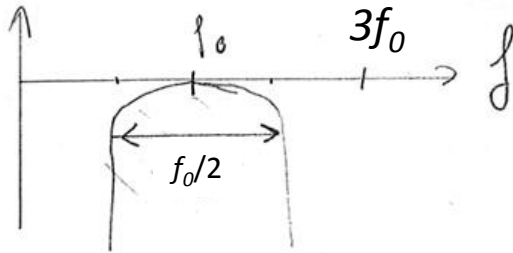
Soit la fonction de transfert $G_2(p)$ suivante (hypothèse/admis) :
$$G_2(p) = \frac{-RCp}{(1 + RCp)^2}$$

a) Quels sont la nature et le rôle de cet élément ?

b) Etudier le facteur de qualité de $G_2(p)$ et justifier l'approximation du 1^{er} harmonique

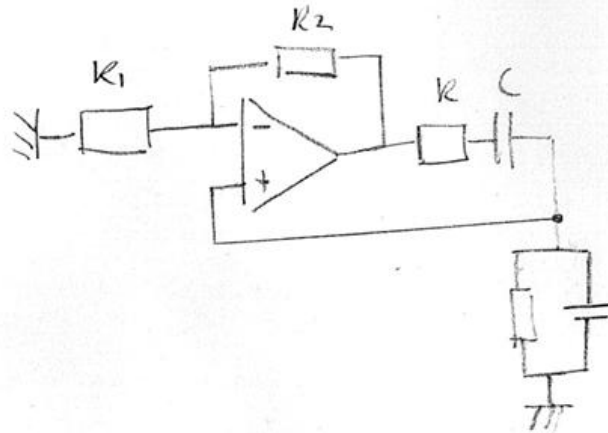
$$G_2(p) = \frac{-\frac{p}{\omega_0}}{\left(1 + \frac{p}{\omega_0}\right)^2} = \frac{-\frac{p}{\omega_0}}{1 + 2\frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$

Le facteur de qualité qui caractérise la sélectivité, c.-à.-d. l'écarte du filtre passe bande n'est pas très élevé.



cependant on peut considérer que l'hypothèse du premier harmonique est vérifiée (l'harmonique à $3f_0$ est bien filtrée ...)

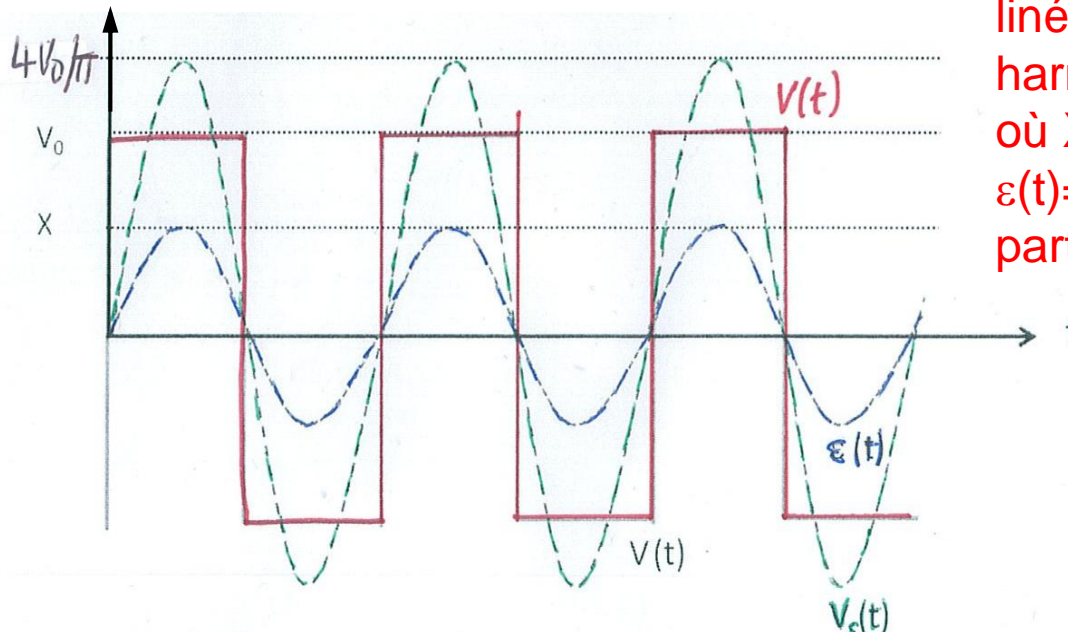
Rq: Dans le cas d'un oscillateur à pont de Wien $Q = \frac{1}{3}$



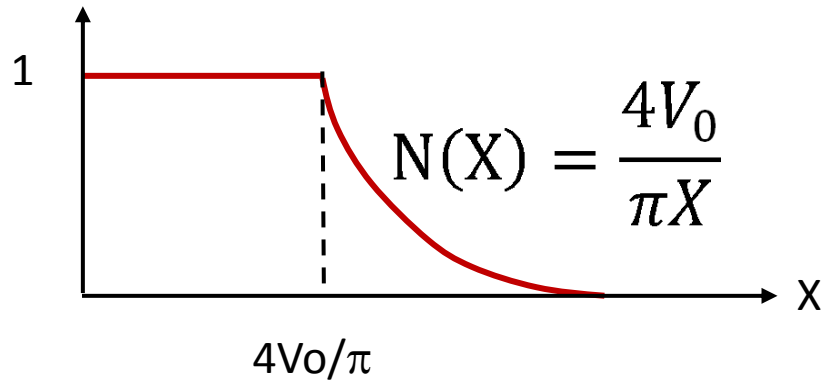
$$T(p) = \frac{-K(p/\omega_0)}{1 + 3p/\omega_0 + (p/\omega_0)^2}$$

$$\omega_0 = 1/kc$$

c) Tracer la caractéristique $V=f(\varepsilon)$



c...) Calculer le gain de la non-linéarité pour le premier harmonique, que l'on notera $N(X)$, où X représente l'amplitude de $\varepsilon(t)$: $\varepsilon(t)=X \sin(2\pi ft)$. Quelle est la particularité de $N(X)$?



Rque : pour $X < 4V_0/\pi$, la non linéarité n'intervient pas et l'on a $N(X) = 1$

d) On suppose qu'une oscillation est apparue, dont l'amplitude se trouve limitée par la non-linéarité. Quelles sont la fréquence et l'amplitude des oscillations de $V_s(t)$?

Pour qu'il y ait oscillation, il faut que la condition de Barkhausen soit satisfaite.
En tenant compte de l'approximation du 1^{er} harmonique et de $N(X)$, il vient :

$$A(\omega_c) B(\omega_c) N(X) = -1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{4V_0}{\pi X} \cdot \frac{1 + j\alpha RC\omega_c}{\alpha\beta(1 + jRC\omega_c)^2} = -1$$

$$\Leftrightarrow 4V_0(1 + j\alpha RC\omega_c) = \pi X \alpha\beta(1 + 2jRC\omega_c - R^2C^2\omega_c^2)$$

On identifie les Re et Im des 2 membres de l'équation

$$\Rightarrow \begin{cases} 4V_0 = \alpha\beta X \pi (1 - R^2C^2\omega_c^2) \\ 4V_0 = 2\pi\beta X \end{cases}$$

$$A(\omega_c)B(\omega_c)N(X) = -1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega_c = \frac{1}{Rc} \sqrt{1 - \frac{4V_0}{\pi\alpha\beta X}} & (1) \\ X = \frac{2V_0}{\pi\beta} & (2) \end{cases}$$

on injecte (2) \rightarrow (1)

\Rightarrow

$$\omega_c = \frac{1}{Rc} \sqrt{1 - \frac{2}{\alpha}}$$

Rque : On retrouve la même pulsation qu'en 3b)
Ceci est lié au fait que $N(X)$ est réel et de ce fait
n'introduit pas de déphasage

Amplitude des oscillations de sortie

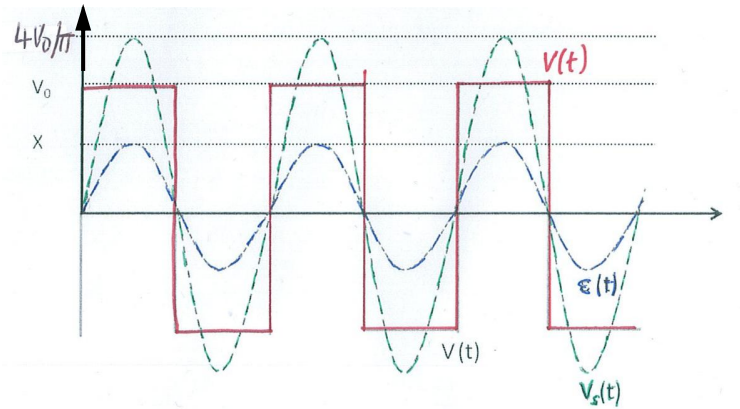
$$V_o = X \cdot |A(\omega_c)|$$

$$V_o = \frac{2V_o}{\pi\beta} \cdot \left| \frac{jRC \cdot \frac{1}{RC} \sqrt{1 - \frac{2}{\alpha}}}{\left(1 + jRC \cdot \frac{1}{RC} \sqrt{1 - \frac{2}{\alpha}}\right)^2} \right|$$

$$V_o = \frac{2V_o}{\pi\beta} \frac{\sqrt{1 - \frac{2}{\alpha}}}{\left| \left(1 + j\sqrt{1 - \frac{2}{\alpha}}\right) \right|^2}$$

$$V_o = \frac{2V_o}{\pi\beta} \frac{\sqrt{1 - \frac{2}{\alpha}}}{1 + 1 - \frac{2}{\alpha}} = \frac{V_o}{\pi\beta} \frac{\sqrt{1 - \frac{2}{\alpha}}}{1 + \frac{1}{\alpha}}$$

c...) Calculer le gain de la non-linéarité pour le premier harmonique, que l'on notera $N(X)$, où X représente l'amplitude de $\varepsilon(t)$: $\varepsilon(t) = X \sin(2\pi ft)$.



Pour $X \geq V_0$ on a un créneau de fréquence f et d'amplitude V_0 , il peut être décomposé en série de Fourier :

$$V(t) = \underbrace{\frac{4V_0}{\pi} \sin 2\pi ft}_{1^{\text{er}} \text{ harmonique}} + A_3 \sin 2\pi 3ft + \dots$$

1^{er} harmonique

Vrai pour $X \geq 0$

$$V_1(t) = \frac{4V_0}{\pi} \sin 2\pi ft \quad \Rightarrow \quad \left[N(X) = \frac{V_1(t)}{\varepsilon(t)} = \frac{\frac{4V_0}{\pi} \sin 2\pi ft}{X \sin 2\pi ft} = \frac{4V_0}{\pi X} \right]$$