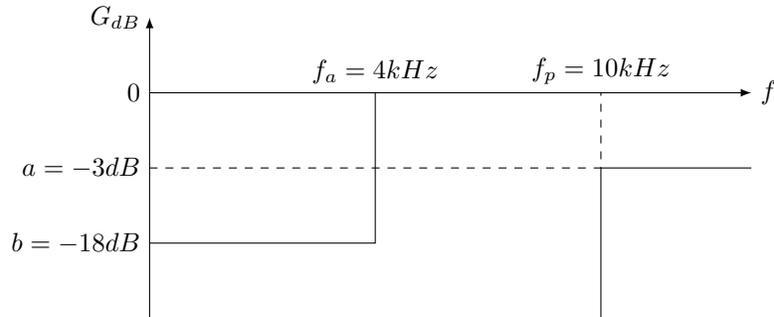


TD2 : Filtres actifs : synthèse et réalisation

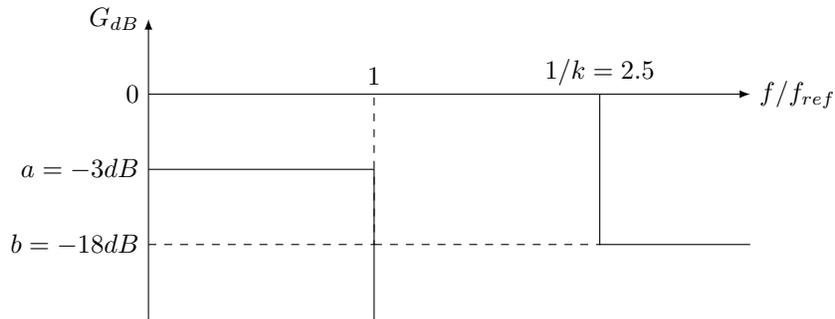
Synthèse et réalisation d'un filtre passe-haut

Synthèse

On désire synthétiser un filtre passe-haut dont le gabarit est le suivant :



Le gabarit du filtre passe-bas normalisé équivalent est le suivant, avec $f_{ref} = f_a$ et $k = f_a/f_p^*$:



$$H^2(j\omega') = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \omega'^{2n}}$$

— Calcul de l'ordre n du filtre

$$\begin{aligned} a_{dB} &= 20 \log(H(j\omega'))|_{\omega'=1} \\ &= 10 \log \frac{1}{1 + \epsilon^2} \\ 10^{-\frac{a_{dB}}{10}} &= 1 + \epsilon^2 \\ \epsilon &= \sqrt{10^{-\frac{a_{dB}}{10}} - 1} \\ \epsilon &= 1 \text{ pour } a_{dB} = -3dB \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{dB} &= 20 \log(H(j\omega'))|_{\omega'=1/k} \\ &= 10 \log \left(\frac{1}{1 + \epsilon^2 k^{-2n}} \right) \\ 10^{-\frac{b_{dB}}{10}} &= 1 + \epsilon^2 k^{-2n} \\ k^{-2n} &= \frac{10^{-\frac{b_{dB}}{10}} - 1}{\epsilon^2} \\ n &= \frac{\ln \left(\frac{10^{-\frac{b_{dB}}{10}} - 1}{\epsilon^2} \right)}{2 \ln \left(\frac{1}{k} \right)} \\ n &\approx 2.25 \text{ pour } b_{dB} = -18dB, k = 0.4 \end{aligned}$$

On choisit donc l'ordre du filtre :

$$n = 3$$

— Calcul de la fonction de transfert normalisée $H_{PB}(s)$ du filtre passe-bas prototype, où $s = p/\omega_{ref}$.

$$H_{PB}(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2(-1)^n s^{2n}}}$$

$$H_{PB}^2(s) = \frac{1}{1 - s^6} \text{ avec } n = 3$$

On détermine H_{PB} à partir des racines du dénominateur de H_{PB}^2 dont on ne garde que celles à partie réelle strictement négative.

$$1 - s^6 = 0 \Leftrightarrow s = e^{j\frac{2k\pi}{6}} = e^{j\frac{k\pi}{3}}, k = 0, \dots, 5$$

Les racines à partie réelle strictement négative sont $e^{j\frac{2\pi}{3}}, e^{j\pi}, e^{-j\frac{2\pi}{3}}$.

$$H_{PB}(s) = \frac{1}{(s - e^{j\frac{2\pi}{3}})(s - e^{j\pi})(s - e^{-j\frac{2\pi}{3}})}$$

$$= \frac{1}{(s^2 - s(e^{j\frac{2\pi}{3}} + e^{-j\frac{2\pi}{3}}) + 1)(s + 1)}$$

$$= \frac{1}{(s^2 - 2s \cos(\frac{2\pi}{3}) + 1)(s + 1)}$$

$$H_{PB}(s) = \frac{1}{(s^2 + s + 1)(s + 1)}$$

— Pour retrouver la fonction de transfert normalisée $H(s)$ du filtre passe-haut, on applique la transformation $s \rightarrow \frac{1}{s}$:

$$H(s) = \frac{1}{(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} + 1)(\frac{1}{s} + 1)}$$

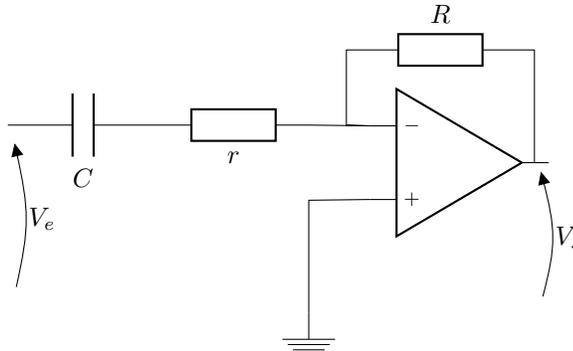
$$= \frac{s^3}{(s^2 + s + 1)(s + 1)}$$

$$H(p) = \frac{\frac{p}{2\pi f_a}}{1 + \frac{p}{2\pi f_a} \left(\frac{p}{2\pi f_a} \right)^2 + \left(\frac{p}{2\pi f_a} \right) + 1} \text{ avec } s = p/\omega_{ref} = \frac{p}{2\pi f_a}$$

Réalisation

— D'après la forme de $H(p)$ que l'on vient de déterminer, on va cascader un passe-haut d'ordre 1 avec un passe-haut d'ordre 2.

Passe-haut d'ordre 1 On utilise un montage à amplificateur opérationnel (supposé parfait) :



L'AO étant supposé parfait, on a $V_+ = V_- = 0$ donc $\frac{V_e}{Z_{rC}} + \frac{V_s}{R} = 0$, d'où

$$H_1(p) = -\frac{R}{Z_{rC}} = \frac{-R}{r + \frac{1}{Cp}} = -\frac{R}{r} \frac{rCp}{1 + rCp}$$

Il faut imposer $\frac{R}{r} = 1$ et $\frac{1}{rC} = \omega_a$.

Avec $C = 1nF$, $f_1 = 4kHz$, on obtient $R = 39.8k\Omega = r$.

Passe-haut d'ordre 2 On utilise un filtre de Sallen-Key dont la structure a été vue au TD1.

$$H_2(p) = A \frac{\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2m\left(\frac{p}{\omega_0}\right) + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2} \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \text{ et } m = \frac{R_1(C_1 + C_2) + R_1 C_2(1 - K)}{2\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

Il faut imposer $\omega_0 = \omega_a$ et $m = 1/2$. On fixe $C = C_1 = C_2 = 1nF$ et $R_1 = 30k\Omega$.

$$\begin{aligned} \omega_0 = \omega_a &\Rightarrow \frac{1}{C\sqrt{R_1 R_2}} = 2\pi f_a \\ &\Rightarrow R_2 = \frac{1}{4\pi^2 f_a^2 C^2 R_1} \\ &\Rightarrow R_2 = 52,7k\Omega \\ m = \frac{1}{2} &\Rightarrow \frac{R_1 2C + R_1 C(1 - K)}{2} \omega_0 = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow R_1(3C - KC)\omega_a = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow K = 3 - \frac{1}{\omega_a R_1 C} \\ &\Rightarrow K = 1,67 \end{aligned}$$

Remarque : le réglage de K peut se faire par exemple à l'aide d'une résistance r_2 variable.

- Les filtres actifs ont une grande impédance d'entrée et une faible impédance de sortie, ce qui permet de les cascader sans qu'ils aient d'influence les uns sur les autres. La fonction de transfert est alors le produit des fonctions de chacun des filtres. En revanche, ces filtres nécessitent d'être alimentés pour fonctionner.

Sensibilité

On calcule la sensibilité de ω_1 par rapport au paramètre C :

$$S_C^{\omega_1} = \frac{\frac{d\omega_1}{\omega_1}}{\frac{dC}{C}} = \frac{d\omega_1}{dC} \frac{C}{\omega_1} = -\frac{1}{rC^2} \frac{C}{\omega_1}$$

$$S_C^{\omega_1} = -1$$

De même pour le paramètre r :

$$S_r^{\omega_1} = -1$$

Si C (ou r) est connue avec une incertitude de 5%, alors l'incertitude engendrée sur ω_1 sera de 5%. La précision de la valeur de ces composants est donc primordiale pour obtenir la fréquence f_a désirée.