Corrigé examen 2021, partie Réseaux de Petri

S. Louise

Décembre 2021

1 Matrice d'incidence et algèbre linéaire

Par convention nous allons prendre comme convention de numérotation : $\{t_{master}, t_{camera}, t_{radar}, tspeed, t_{display}\}$. Pour les places elles seront numérotées de haut en bas et droite à gauche.

Sous ces conditions, la matrice d'incidence est :

$$W = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

En ce qui concerne les invariants de marquages, ils obéissent à la condition suffisante $q.W = 0$ soit :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} q_0 + q_1 & = & 0 \\ 2q_0 & = & q_2 + q_3 \\ q_1 & = & q_4 \\ q_3 + \alpha q_4 & = & q_5 \\ q_2 + q_5 & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} q_0 & = & -q_1 \\ q_4 & = & q_1 \\ q_5 & = & -q_2 \\ q_2 + q_3 & = & -\alpha q_4 \\ q_2 + q_3 & = & -2q_1 \end{array} \right.$$

d'où : $(2 - \alpha)q_4 = 0$

L'existence d'une solution non triviale à ce système implique que $\alpha = 2$

En prenant cette hypothèse, le système se réduit à :

$$\begin{cases} q_0 & = & -q1 \\ q_1 & & \\ q_2 & & \\ q_3 & = & -2q1 - q2 \\ q_4 & = & q_1 \\ q_5 & = & -q2 \end{cases}$$

Soit un noyau à deux composantes exprimées ici avec q_1 et q_2. On a donc deux composantes conservatives :

$$\begin{pmatrix} q_1 & q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \iff -p_0 + p_1 - 2p_3 + p_4 = 0 \tag{1}$$

Elle peut s'interpréter comme une forme d'équilibrage des horloges entre master, caméra et radar et correspond au fait qu'avec cet équilibrage, il n'y a pas d'accumulation de jeton dans le système (n.b. la question de l'interprétation étant difficile, elle n'a pas été notée).

La seconde composante conservative :

$$\begin{pmatrix} q_1 & q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \iff p_2 - p_3 - p_5 = 0 \tag{2}$$

Qui correspond à l'utilisation des images caméra.

2 Graphe de marquage

Après deux activations de t_{master}, le marquage que l'on prend comme initial est ${}^t\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D'où le graphe de marquage (sans utiliser t_{mater}) :

$$
\begin{tikzcd}
\begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \arrow[r, "t_{camera}"] \arrow[dr, "t_{radar}"'] & \begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \arrow[r, "t_{radar}"] & \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \arrow[r, "t_{radar}"] & \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\2\\0\end{pmatrix} \arrow[r, "t_{spd-brk}"] & \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \arrow[r, "t_{dspl}"] & \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \arrow[ur, "t_{camera}"] \arrow[r, "t_{radar}"'] & \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\\2\\0\end{pmatrix} \arrow[ur, "t_{camera}"] & & &
\end{tikzcd}
$$

Comme on le voit, il faut 2 activations de t_{radar} sont nécessaires pour une activation de t_{camera}, d'où $f_{radar} = 2.f_{camera} = 120Hz$.

On verra plus loin une réponse plus formelle.

3 Programmation

```
void SpeednBreak() {
        debut_atomique();
        if((Ppedestrian >= 1)&&(Pobst >=1)) {
                Pped--; Pobst-=2 ;
                Pdisplay++;
                /* do usefull stuff also */
        }
        fin_atomique();
        /* do more usefull stuff in parallel */
}
```

Bonus

On peut également étudier les séquences répétitives. Elles vérifient $WS = 0$, soit :

$$\left\{\begin{array}{lcl} n_{master} & = & 2n_{camera} \\ n_{master} & = & n_{radar} \\ n_{camera} & = & n_{display} \\ n_{camera} & = & n_{spd-brk} \\ n_{radar} & = & 2n_{spd-brk} \\ n_{spd-brk} & = & n_{dspl} \end{array}\right. \Longrightarrow S_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

S_0 est la base des séquences répétitives qui reviennent donc à un état qui n'accumule pas de jetons. S_0 est donc une base pour les ordonnancements valides du système d'aide à la conduite en temps-réel considéré. Par conséquent, selon cette base d'ordonnancements, la fréquence master est la même que la fréquence radar qui est le double de la fréquence caméra ($\frac{n_{radar}}{n_{camera}} = 2$). Ainsi, dans toutes les bases d'ordonnancements valides, si la fréquence caméra est 60Hz alors la fréquence Radar doit être 120Hz pour que le réseau de Petri considéré soit un modèle cohérent de l'application temps-réel.